Handbook

Aljabar Linier dan Matriks

Dr. Ferry Wahyu Wibowo, S.Si., M.Cs.

Hanya untuk bahan ajar dan tidak diperjualbelikan

Handbook

Aljabar Linier dan Matriks

Dr. Ferry Wahyu Wibowo, S.Si., M.Cs.
Penemu Algoritma Chimpanzee Leader Election Optimization (CLEO)

Hanya untuk bahan ajar dan tidak diperjualbelikan

Februari 2024

Universitas Amikom Yogyakarta

Hanya untuk bahan ajar dan tidak diperjualbelikan

Aljabar Linier dan Matriks
Universitas Amikom Yogyakarta, Handbook, 61 halaman (Februari 2024)

Kata Pengantar

Segala puja dan puji bagi Allah SWT, Tuhan Yang Maha Esa, memberikan kenikmatan dan ujian hidup yang fluktuatif dan senantiasa segala makhluk bersandar atas rahmat-Nya. Sholawat serta salam senantiasa tercurah kepada Rasulullah Muhammad Saw, sebagai manusia terutus risalah dan hikmah atas petunjuk wahyu-Nya. Di setiap urusan ada sisi kemudahan dan atas kesulitan ada solusi keringanan, problema membutuhkan solusi dan manusia telah dibekali dengan kemampuan untuk memecahkan problema yang terbebankan melalui wasilah akal, bakat, rasa, dan karsa. Begitu juga permasalahan matematika yang dianggap sukar oleh sebagian manusia. Jika permasalahan dianggap sebagai permainan, maka di setiap permainan ada tahapan-tahapan atau level-level. Jika sesi tahapan itu diulang-ulang betapapun susahnya suatu perkara tersebut, maka ianya akan menjadi ahli karena telah terasah untuk memahami konteks problem yang sudah familiar dan menjadikan pengetahuan sebagaimana fungsi dasar kodrat manusia diciptakan. Rasionalitas dan kemauan yang kuat akan membuahkan hasil, manusia yang berkepribadian dan bermental, yang tidak terpatri akan surutnya asa. Oleh karenanya handbook ini hanya sekedar bahan ajar untuk mendukung pembelajaran perkuliahan. Semoga dukungan dari handbook ini sedikit banyak mengikat informasi yang dibutuhkan sebagai salah satu landasan disiplin ilmu pengetahuan yang aplikatif tidak hanya sekedar teori yang dihafal, namun juga dapat dikembangkan dalam rasionalitas yang logis.

Februari 2024
Penulis,

Dr. Ferry Wahyu Wibowo, S.Si., M.Cs.

Daftar Isi

1 PENDAHULUAN **1**
- 1.1 Penjumlahan dan Pengurangan 2
- 1.2 Perkalian Skalar 3

2 PERKALIAN MATRIKS & TRANSPOSE **4**
- 2.1 Perkalian Matriks 4
- 2.2 Transpose 5

3 DETERMINAN **7**
- 3.1 Determinan 2x2 7
- 3.2 Determinan Berukuran Besar 8

4 RELASI DETERMINAN **10**
- 4.1 Pengecekan Determinan 10
- 4.2 Minor 10
- 4.3 Kofaktor 11
- 4.4 Adjoin 12
- 4.5 Invers 12

5 SISTEM LINIER **14**
- 5.1 Sistem Persamaan Linier 14
- 5.2 Penyelesaian Matriks 15

6 METODE CRAMER **16**
- 6.1 Aturan Cramer 16
- 6.2 Penyelesaian Cramer untuk Matriks 2x2 17
- 6.3 Penyelesaian Cramer untuk Matriks 3x3 18

7 METODE GAUSSIAN **20**
- 7.1 Eliminasi Gauss 20
- 7.2 Penyelesaian Gauss untuk Matriks 2x2 21
- 7.3 Penyelesaian Gauss untuk Matriks 3x3 23

8 METODE GAUSS-JORDAN **25**
- 8.1 Eliminasi Gauss-Jordan 25
- 8.2 Penyelesaian Gauss-Jordan untuk Matriks 2x2 26
- 8.3 Penyelesaian Gauss-Jordan untuk Matriks 3x3 27

9 OPERASI DOT PRODUCT **29**
- 9.1 Dot Product Vektor 29
- 9.2 Sifat-Sifat Dot Product Vektor 30

10 OPERASI CROSS PRODUCT **33**
- 10.1 Cross Product Vektor 33
- 10.2 Sifat-Sifat Cross Product 34

11 NILAI EIGEN & VEKTOR EIGEN **37**

11.1 Nilai Eigen & Vektor Eigen 37
11.2 Vektor Eigen Matriks 2x2 38
11.3 Vektor Eigen Matriks 3x3 39
12 APLIKASI EIGEN VALUE & EIGEN VECTOR 45
12.1 Pemrosesan Gambar Digital 45
12.2 Kompresi Gambar Menggunakan Principal Component Analysis 46
DAFTAR PUSTAKA 52
LAMPIRAN A: Pemrograman Python untuk matriks 53
LAMPIRAN B: Penerapan matriks pada jaringan syaraf tiruan sederhana menggunakan Python 55
LAMPIRAN C: Kompresi gambar menggunakan PCA pada Python 58

Daftar Tabel

Tbl.1 Data dua dimensi x dan y. 46
Tbl.2 Data mean dari dua dimensi x dan y. 47
Tbl.3 Data kovarians dari dua dimensi x dan y. 47
Tbl.4 Komponen-komponen dari principal component. 48
Tbl.5 Data baru dari dua dimensi x dan y. 49

Daftar Gambar

Gbr.1 Gabriel Cramer, matematikawan Swiss penemu aturan Cramer. 16
Gbr.2 Johann Carl Friedrich Gauss, matematikawan Jerman penemu metode Gaussian. 20
Gbr.3 Wilhelm Jordan, geodesis Jerman penemu eliminasi Gauss-Jordan. 25
Gbr.4 Dot product vektor. 29
Gbr.5 Permainan bambu gila. 31
Gbr.6 Kaidah tangan kanan. 33
Gbr.7 Gambar beresolusi 1024×1024 diolah menggunakan bing image yang mengilustrasikan simpanse dengan pemandangan gunung merapi dan samudera. 49
Gbr.8 Pembagian gambar menjadi 3 channel: biru, hijau, dan merah. 50
Gbr.9 Nilai eigen dari 3 channel: biru, hijau, dan merah. 50
Gbr.10 Varians kumulatif oleh komponen pada PCA. 51
Gbr.11 Kompresi gambar berdasarkan jumlah komponen 10, 25, 50, 100, 150, dan 250. 51

Glossary

- **Determinan matriks:** selisih antara perkalian elemen-elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder.
- **Matriks:** suatu susunan bilangan real atau bilangan kompleks atau elemen-elemen yang disusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk jajaran persegi panjang.
- **Matriks non singular:** matriks yang nilai determinannya tidak sama dengan nol (0).
- **Matriks singular:** matriks yang nilai determinannya adalah nol (0). Matriks ini juga tidak memiliki nilai invers matriks.
- **Ordo:** ukuran yang digunakan untuk sebuah matrik.
- **Transpose matriks:** matriks baru yang diperoleh dengan cara menukar elemen-elemen baris menjadi elemen kolom atau sebaliknya.

1. PENDAHULUAN

Tujuan:
Mahasiswa mampu menghitung berbagai operasi matematis terhadap matriks dan determinan.
Indikator:
Ketepatan menghitung berbagai operasi matematis terhadap matriks: penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar.

Matriks merupakan salah satu cabang bidang matematika yang mempunyai banyak peran dalam penerapan Ilmu Komputer, Fisika, Kimia, dan tentunya Matematika itu sendiri. Matrik mempunyai susunan elemen berbentuk persegi panjang dan dilambangkan dengan huruf besar. Elemen-elemen dalam matriks dituliskan dalam tanda kurung dengan urutan-urutannya ditentukan oleh jumlah baris dan kolom, dimana penulisan jumlah baris senantiasa didahulukan daripada kolom, $b \times k$, sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (1).

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} \tag{1}$$

matrik di atas merupakan matriks 3×4 dimana 3 menunjukkan jumlah baris, sedangkan 4 merupakan jumlah kolom. Matriks berguna untuk merepresentasikan wakilan sistem persamaan simultan, transformasi geometri objek, mekanika kuantum, statistik, kecerdasan buatan dan lain sebagainya.

Beberapa bentuk khusus dari jenis-jenis matriks adalah:

1. **Matriks persegi**, yaitu matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama, sebagaimana pada persamaan (2).
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \tag{2}$$
2. **Vektor**, yaitu matriks yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom, sebagaimana secara berurutan ditunjukkan pada persamaan (3).
$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{3}$$
3. **Matriks diagonal**, yaitu matriks yang memiliki 0 untuk setiap elemen, kecuali nilai pada diagonal utamanya, sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (4).
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \tag{4}$$

4. **Matriks identitas**, yaitu matriks diagonal persegi khusus dengan nilai 1 pada setiap diagonal utamanya. Matriks identitas b $\times$ k dilambangkan sebagai I, sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (5).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Tes 1: Berapakah ukuran matriks ini:

$$\begin{bmatrix} -10 & 1E^{-7} \\ 8 & -4 \\ -5 & 0 \\ \pi & -2 \end{bmatrix}$$

1.1 Penjumlahan dan Pengurangan

Penjumlahan atau pengurangan dua matriks yang berukuran sama dapat dilakukan dengan menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang bersesuaian, sebagaimana pada persamaan (6).

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & k & -3 \\ 5 & 2 & 2k \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 2+3 & -1+k & 0+(-3) \\ -3+5 & 1+2 & k+2k \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 5 & k-1 & -3 \\ 2 & 3 & 3k \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

Tes 2: Carilah matriks A+B, jika diberikan matriks-matriks sebagaimana berikut ini:

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{B} = \begin{bmatrix} b & 3a \\ 2b & -3 \\ 3 & ab \end{bmatrix}$$

Tes 3: Carilah matriks A-B, jika diberikan matriks-matriks sebagaimana berikut ini:

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ 0 & -c \\ 0 & ab \end{bmatrix}, \quad \text{B} = \begin{bmatrix} 7 & -ac \\ -4 & b \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

1.2 Perkalian Skalar

Perkalian matriks dengan skalar λ dapat dilakukan dengan mengalikan setiap elemen dari matriks A dengan λ. Hal ini sama dengan perkalian skalar dengan vektor, sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (7).

$$\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Tes 4: Carilah -4A, jika diberikan matriks sebagaimana berikut ini:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

Tes 5: Carilah -2A+4B, jika diberikan matriks-matriks sebagaimana berikut ini:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ 0 & -c \\ 4 & ab \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 7 & -ac \\ -4 & b \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

2. PERKALIAN MATRIKS & TRANSPOSE

Tujuan:
Mahasiswa mampu menghitung berbagai operasi matematis terhadap matriks dan determinan.
Indikator:
Ketepatan menghitung berbagai operasi matematis terhadap matriks: perkalian antar matriks dan transpose.

2.1 Perkalian Matriks

Perkalian dua matriks mempunyai perbedaan dengan perkalian skalar. Perkalian matriks melakukan perkalian pada setiap elemen di setiap baris matriks pertama dengan elemen-elemen yang bersesuaian pada setiap kolom matriks kedua dan menjumlahkannya, perkalian jenis ini disebut perkalian titik dimana hal serupa didapatkan pada perkalian titik untuk vektor. Jumlah baris dan kolom menentukan elemen mana dari matriks produk yang dihasilkan. Contoh proses ini ditunjukkan pada persamaan (8).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Proses ini mulai dengan mencari perkalian titik dari baris pertama dan kolom pertama untuk menghasilkan elemen pada baris pertama, kolom pertama menjadi sebagaimana persamaan (9).

$$A = \begin{bmatrix} 1\times 0+3\times(-3) & \end{bmatrix} \tag{9}$$

Kemudian cari perkalian titik baris pertama dan kolom kedua untuk menghasilkan elemen pada baris pertama, sehingga kolom kedua menjadi seperti persamaan (10).

$$A = \begin{bmatrix} 1\times 0+3\times(-3) & 1\times(-1)+3\times 2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Kemudian carilah hasil kali titik baris kedua dan kolom pertama untuk menghasilkan elemen pada baris kedua, kolom pertama menjadi sebagaimana persamaan (11).

$$A = \begin{bmatrix} 1\times 0+3\times(-3) & 1\times(-1)+3\times 2 \\ (-2)\times 0+4\times(-3) & \end{bmatrix} \tag{11}$$

Kemudian cari perkalian titik baris kedua dan kolom kedua untuk menghasilkan elemen pada baris kedua, kolom kedua sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (12).

$$A = \begin{bmatrix} 1\times 0+3\times(-3) & 1\times(-1)+3\times 2 \\ (-2)\times 0+4\times(-3) & (-2)\times(-1)+4\times 2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi persamaan (13).

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0-9 & -1+6 \\ 0-12 & 2+8 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ -12 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

Tes 6: Carilah A^2, jika diberikan matriks sebagaimana berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

Tes 7: Carilah -2(A×B), jika diberikan matriks-matriks sebagaimana berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ 0 & -c \\ 4 & ab \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -ac \\ -4 & b \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

2.2 Transpose

Transpose matriks A dinotasikan sebagai A^T dan dibentuk dengan mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Hal tersebut dapat dibayangkan sebagai pencerminan setiap elemen di diagonal terdepan, yang ditunjukkan sebagaimana persamaan (14).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Sebagai misal diketahui suatu matriks A sebagaimana persamaan (15),

$$\begin{bmatrix} -a & 3 & b \\ 9 & c & -4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Maka transpose matriks A^T dituliskan sebagai persamaan (16).

$$\begin{bmatrix} -a & 9 \\ 3 & c \\ b & -4 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Tes 8: Carilah $3A^T$, jika diberikan matriks sebagaimana berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

Tes 9: Carilah $-2A \times B^T$, jika diberikan matriks-matriks sebagaimana berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -ac \\ -4 & b \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

3. DETERMINAN

Tujuan:
Mahasiswa mampu menghitung berbagai operasi matematis terhadap matriks dan determinan.
Indikator:
Ketepatan menghitung berbagai operasi matematis terhadap determinan: 2×2, 3×3, dan 4×4.

3.1 Determinan 2x2

Suatu matriks persegi A mempunyai determinan A yang dapat ditulis sebagai detA atau $|A|$. Determinan suatu matriks mempunyai beberapa sifat yang berguna terkait dengan matriks tersebut, seperti faktor skala transformasi yang diwakili oleh matriks tersebut, atau apakah matriks tersebut memiliki invers atau tidak. Untuk matriks A, 2×2, yang ditunjukkan pada persamaan (17),

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{17}$$

Sehingga determinan matriks A dapat dituliskan sebagaimana persamaan (18).

$$\begin{aligned} detA &= |A| \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - bc \end{aligned} \tag{18}$$

Jika det A=0, maka A dikatakan matriks singular. Jika det A$\neq$ 0, maka A dikatakan matriks non singular.

Tes 10: Carilah determinan matriks A, jika diberikan matriks sebagaimana berikut ini:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Tes 11: Carilah |A|, jika diberikan matriks A merupakan matriks singular sebagaimana berikut ini:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5a \\ a+3 & -4 \end{bmatrix}$$

3.2 Determinan Berukuran Besar

Setelah memahami cara mencari determinan matriks 2×2, sekarang beralih pada pencarian determinan yang lebih besar. Misal mencari determinan A berukuran 3×3 sebagaimana persamaan (19).

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \tag{19}$$

Maka determinan dari matriks A berukuran 3×3 ditunjukkan pada persamaan (20).

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= a(ei-fh) - b(di-fg) + c(dh-eg) \\ &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \end{aligned} \tag{20}$$

Setiap elemen di baris atas dikalikan dengan matriks minornya (pembahasan lebih lanjut terdapat pada bab 4) dan 1 atau -1 secara bergantian, yang mana ini merupakan contoh ekspansi Laplace.

Prinsipnya determinan matriks merupakan jumlah produk setiap elemen pada baris ke-i atau kolom ke-j dengan $(-1)^{i+j}$ dan minor dari elemen tersebut. Sebagai misal ditunjukkan pada persamaan (21).

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{21}$$

Hal yang serupa pun didapatkan untuk kolom ketiga, sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (22).

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{1+3}a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31} + a_{33}a_{11}a_{22} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned} \tag{22}$$

Dari pemaparan ini, pencarian determinan matriks persegi dengan ukuran berapa pun akan mungkin dilakukan melalui pentahapan ini. Namun, penghitungan secara manual ini akan memakan waktu yang sangat lama, dimana matriks 4×4, yang mengharuskan pencarian determinan dari empat matriks 3×3.

Tes 12: Carilah $|\text{-}2\text{A}|$, jika diberikan matriks singular sebagaimana berikut ini:

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & a \\ -7 & 3a & 0 \\ -a & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Tes 13: Carilah $|\text{A}|$, jika diberikan matriks A sebagaimana berikut ini:

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

dengan matriks B, C, D, dan E sebagaimana berikut:

$$\text{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{C} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & -3 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{D} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{E} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4. RELASI DETERMINAN

Tujuan:
Mahasiswa mampu menghitung berbagai operasi matematis terhadap matriks dan determinan.
Indikator:
Ketepatan menghitung berbagai operasi matematis terhadap persoalan yang berhubungan dengan determinan: determinan, minor, cofactor, adjoin, dan invers.

4.1 Pengecekan Determinan

Jika diketahui suatu persoalan determinan matriks A sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (23).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Maka determinan dari matriks A ditunjukkan sebagaimana persamaan (24).

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= (2.1 - 0.4) - 2(3.1 - 0.(-1)) - (3.4 - 2.(-1)) \\ &= (2-0) - 2(3-0) - (12+2) \\ &= 2 - 6 - 14 \\ &= -18 \end{aligned} \tag{24}$$

Nilai dari |A|=-18 dan tidak nol (0), sehingga mempunyai invers matriks.

4.2 Minor

Minor, M, suatu elemen matriks merupakan determinan submatriks yang tersisa setelah penghilangan baris dan kolom yang memuat elemen tersebut. Misalkan diketahui suatu matrik sebagaimana persamaan (25).

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \tag{25}$$

Maka minor elemen *d* ditunjukkan menurut persamaan (26).

$$\begin{bmatrix} b & c \\ h & i \end{bmatrix} = bi - ch \tag{26}$$

Sedangkan minor elemen f ditunjukkan menurut persamaan (27).

$$\begin{bmatrix} a & b \\ g & h \end{bmatrix} = ah - bg \tag{27}$$

dan seterusnya untuk setiap minor elemen yang lain.

Melanjutkan pada kasus 4.1 dimana $|\mathrm{A}| \neq 0$, maka matriks minor M dapat dicari sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (28).

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-0 & 3-0 & 12+2 \\ 2+4 & 1-1 & 4+2 \\ 0+2 & 0+3 & 2-6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 6 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{28}$$

Tes 14: Carilah minor a, jika diberikan matriks sebagaimana berikut ini:

$$\mathrm{A}= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 4 & a & -5 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Tes 15: Carilah minor b, jika $b = -2a$ pada matriks sebagaimana berikut ini:

$$\mathrm{A}= \begin{bmatrix} b & -3 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

4.3 Kofaktor

Matriks kofaktor, K, merupakan suatu minor yang dikalikan dengan $(-1)^{i+j}$, dimana elemen-elemennya berada pada baris ke-i dan kolom ke-j. Hal ini dapat ditunjukkan pada

perubahan tanda-tanda elemen pada matriks menurut persamaan (29).

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \tag{29}$$

Sehingga kofaktor dari minor persamaan (28) dapat dituliskan kofaktornya sebagaimana persamaan (30)

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} (+)2 & (-)3 & (+)14 \\ (-)6 & (+)0 & (-)6 \\ (+)2 & (-)3 & (+)-4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 14 \\ -6 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

Tes 16: Tentukan tanda dari matriks kofaktor untuk posisi baris ke-5 dan kolom ke-6.

4.4 Adjoin

Matriks adjoin, Adj, merupakan transpos dari matriks kofaktor yang terkadang selain dituliskan sebagai Adj juga dituliskan sebagai C^T. Sehingga untuk materix adjoint dari persamaan (30) ditunjukkan menurut persamaan (31).

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 14 \\ -6 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \\ C^T &= \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \\ 14 & -6 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

4.5 Invers

Invers matriks merupakan matriks kebalikan dari matriks asal, dimana jika matriks asal dikalikan dengan matriks kebalikannya akan menghasilkan matriks identitas. Invers matriks ini dapat dituliskan sebagaimana persamaan (32).

$$\begin{aligned} BB^{-1} &= I \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{32}$$

Matriks ini juga dapat dituliskan sebagaimana persamaan (33).

$$A^{-1} = \frac{1}{|\,A\,|} \times \text{Adj A, dengan syarat } |\,A\,| \neq 0 \tag{33}$$

Sehingga matriks B berordo 2×2 mempunyai invers matriks yang dapat dituliskan sebagaimana persamaan (34).

$$\text{Jika } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ dengan syarat } |\,B\,| \neq 0 \tag{34}$$

Sedangkan invers matriks dari matriks A sebagaimana pada persamaan (23) dituliskan sebagaimana pada persamaan (35).

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|\,A\,|} \times C^T \\ &= -\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \\ 14 & -6 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{35}$$

Tes 17: Carilah $(RS)^{-1}$, jika diberikan matriks-matriks berikut ini:

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Tes 18: Carilah $2A^{-1}$ pada matriks berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} b & -3 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

5. SISTEM LINIER

Tujuan:
Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan sistem linier dengan metode invers, metode crammer, dan gauss-jordan.
Indikator:
Ketepatan menyelesaikan persoalan sistem linier dengan metode invers.

5.1 Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan simultan sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (36).

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= k \\ dx+ey+fz &= l \\ gx+hy+iz &= m \end{aligned} \tag{36}$$

Persamaan sistem linier tersebut dapat direpresentasikan menjadi suatu wakilan matriks sebagaimana pada persamaan (37).

$$\begin{bmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix} \tag{37}$$
$$A \cdot c = s$$

Penyederhanaan persamaan tersebut digunakan untuk menentukan nilai-nilai solusi pada x, y, dan z. Persamaan tersebut memiliki tiga persamaan dalam tiga variabel yang tidak diketahui yaitu x, y, dan z, sedangkan metriks A merupakan matriks berordo 3×3. Penerapan sistem ini mempunyai jumlah persamaan dan variabel yang berbeda. Jika terdapat n persamaan dalam c variabel, A adalah matriks berukuran c$\times$n. Sistem persamaan yang mempunyai nilai c$\neq$m biasanya mempunyai nilai nol atau banyak solusi infinit dan membutuhkan banyak teknik yang berbeda untuk menyelesaikannya.

Tes 19: Buat bentuk wakilan matriks dari persamaan linier berikut ini:

$$\begin{aligned} x+6y+3z &= -3 \\ 4x-2y+5z &= 5 \\ 7x+y+2z &= 4 \end{aligned}$$

5.2 Penyelesaian Matriks

Sistem persamaan yang dibentuk menjadi $A \cdot c = s$, dapat digunakan untuk mencari solusi c melalui perkalian matriks invers melalui persamaan (38).

$$\begin{aligned} A \cdot c &= s \\ A^{-1} \cdot A \cdot c &= A^{-1} \cdot s \\ I \cdot c &= A^{-1} \cdot s \\ c &= A^{-1} \cdot s \end{aligned} \tag{38}$$

Pencarian nilai-nilai pada variabel c dapat dicari menggunakan $A^{-1} \cdot s$ dengan beberapa syarat yaitu bahwa A harus non singular atau $\mid A \mid \neq 0$, karena jika singular atau $\mid A \mid = 0$ maka sistem persamaan tidak mempunyai solusi atau solusinya banyak tak terbatas.

Tes 20: Cari nilai-nilai x, y, dan z menggunakan pendekatan matriks dari persamaan linier berikut ini:

$$\begin{aligned} x + 6y + 3z &= -3 \\ 2x + 5z &= 5 \\ 7x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

Tes 21: Ardi, Beni, Candra, dan Deni hendak membeli bahan membuat adonan roti yang akan dihidangkan pada pesta rakyat. Ardi membeli 3 kg gula, 5 kg tepung, dan 2 kg telur dengan harga Rp 200.000,-. Beni membeli 2 kg gula dan 3 kg tepung saja dengan harga Rp 130.500,-. Candra membeli 4 kg gula, 4 kg tepung, dan 3 kg telur dengan harga Rp 250.000,00. Jika Deni membeli 5 kg gula, 6 kg tepung, dan 7 kg telur, berapakah harga yang harus Deni bayarkan?

6. METODE CRAMER

Tujuan:
Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan sistem linier dengan metode invers, metode cramer, dan gauss-jordan.
Indikator:
Ketepatan menyelesaikan persoalan sistem linier dengan metode crammer.

6.1 Aturan Cramer

Salah satu metode untuk menyelesaikan sistem persamaan adalah metode atau aturan Cramer. Prinsip dari penyelesaian untuk medapatkan solusi ini memanfaatkan determinan. Metode ini diperkenalkan pada pertengahan abad ke-18 dan penamaannya diambilkan dari penemunya, yaitu matematikawan Swiss Gabriel Cramer (1704-1752) (lihat gambar 1)[1], yang telah memperkenalkannya pada tahun 1750 dalam buku *Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques* (pengantar analisis garis lengkung aljabar).

Fig. 1. Gabriel Cramer, matematikawan Swiss penemu aturan Cramer.

Aturan Cramer merupakan salah satu metode yang layak dan efisien untuk menemukan solusi terhadap sistem dengan jumlah persamaan yang tidak diketahui, asalkan dapat diketahui jumlah persamaan yang sama dengan persamaan yang tidak diketahui. Aturan ini memberikan solusi unik terhadap sistem persamaan, jika memang ada. Namun, jika sistem

[1]Diambil dari https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cramer/

tidak mempunyai solusi atau jumlah solusi tak terhingga, hal ini akan ditunjukkan dengan determinan nol. Pengecekan kekonsistenan sistem atau bergantung, dapat dilakukan melalui metode lain, seperti eliminasi.

6.2 Penyelesaian Cramer untuk Matriks 2x2

Penyelesaian sistem persamaan linier menggunakan operasi baris dasar untuk memberikan pemahaman tentang aturan Cramer dapat mempertimbangkan sistem dua persamaan dalam dua variabel sebagaimana persamaan (39).

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{39}$$

Solusi yang ditawarkan oleh metode Cramer untuk persamaan (39) di atas mempunyai syarat D≠0 ditunjukkan menurut persamaan (40).

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} & y &= \frac{D_y}{D} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} & &= \frac{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} \end{aligned} \tag{40}$$

Sebagai misal penyelesaian dari sistem persamaan linier untuk persamaan (41).

$$\begin{aligned} 12x + 3y &= 15 \\ 2x - 3y &= 13 \end{aligned} \tag{41}$$

Maka pencarian variabel x dan y dapat dicari menggunakan persamaan (40) yang ditunjukkan menurut persamaan (42).

$$\begin{aligned} x = \frac{D_x}{D} &= \frac{\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}} & y = \frac{D_y}{D} &= \frac{\begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}} \\ &= \frac{-45-39}{-36-6} & &= \frac{156-30}{-36-6} \\ &= \frac{-84}{-42} & &= \frac{126}{-42} \\ &= 2 & &= -3 \end{aligned} \tag{42}$$

Tes 22: Cari nilai-nilai x dan y menggunakan aturan Cramer dari persamaan linier berikut ini:

$$\begin{aligned} x + 6y &= -10 \\ 2x - 5y &= 7 \end{aligned}$$

6.3 Penyelesaian Cramer untuk Matriks 3x3

Jika matriks yang ingin diselesaikan berordo 3×3 sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (43).

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Maka untuk mencari determinannya, maka matriksnya diberi elemen khayal untuk memudahkan dalam mengilustrasikan alur persamaannya sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (44).

$$|A| = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right] \tag{44}$$

Sehingga didapatkan nilai-nilai persamaan determinannya sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (45).

$$|A| = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1 \tag{45}$$

Dari hal tersebut, maka dapat dicari determinan matriks sebagaimana ditunjukkan untuk contoh persamaan (46).

$$\begin{aligned} |A| &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \\ &= 0(-1)(1) + 2(1)(4) + 1(3)(0) - 4(-1)(1) - 0(1)(0) - 1(3)(2) \\ &= 0 + 8 + 0 + 4 - 0 - 6 \\ &= 6 \end{aligned} \tag{46}$$

Sehingga untuk menyelesaikan persamaan linier yang sistem persamaannya berordo 3×3 dapat ditunjukkan menurut aturan sebagaimana persamaan (47).

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + iz &= m \end{aligned} \tag{47}$$

Maka persamaan determinan D_X, D_y, dan D_z untuk mencari nilai-nilai variabel x, y, dan z ditunjukkan menurut persamaan (48).

$$D = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, D_x = \begin{bmatrix} k & b & c \\ l & e & f \\ m & h & i \end{bmatrix}, D_y = \begin{bmatrix} a & k & c \\ d & l & f \\ g & m & i \end{bmatrix}, D_z = \begin{bmatrix} a & b & k \\ d & e & l \\ g & h & m \end{bmatrix} \tag{48}$$

Contoh kasus untuk persamaan (49) yang diselesaikan menggunakan aturan Cramer.

$$\begin{aligned} x+y-z &= 6 \\ 3x-2y+z &= -5 \\ x+3y-2z &= 14 \end{aligned} \tag{49}$$

Maka nilai-nilai determinan matriksnya sebagaimana persamaan (50).

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \\ D_x = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 14 & 3 & -2 \end{bmatrix}, & D_y = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 14 & -2 \end{bmatrix}, D_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{50}$$

Lalu akan dapat ditemukan nilai-nilai variabel x, y, dan z sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (51).

$$\begin{aligned} x &= \frac{Dx}{D} = \frac{-3}{-3} = 1 \\ y &= \frac{Dy}{D} = \frac{-9}{-3} = 3 \\ z &= \frac{Dz}{D} = \frac{6}{-3} = -2 \end{aligned} \tag{51}$$

Tes 23: Cari nilai-nilai x, y, dan z menggunakan aturan Cramer dari persamaan linier berikut ini:

$$\begin{aligned} x+6y+3z &= -3 \\ 2x+5z &= 5 \\ 7x+y+2z &= 4 \end{aligned}$$

7. METODE GAUSSIAN

Tujuan:
Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan sistem linier dengan metode invers, metode cramer, dan gauss-jordan.
Indikator:
Ketepatan menyelesaikan persoalan sistem linier dengan metode gaussian.

7.1 Eliminasi Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss (lihat gambar 2)[2] adalah seorang matematikawan paling produktif dalam sejarah dan hidup pada akhir abad ke-18 dan awal abad ke-19. Kontribusinya terhadap ilmu matematika dan fisika mencakup berbagai bidang seperti aljabar, teori bilangan, geometri diferensial, astronomi, optik, dan lain-lain. Disertasi doktoral Gauss membuktikan teori-teori dasar aljabar bahwa setiap persamaan polynomial memiliki solusi sebanyak pangkatnya. Pada usia 19 tahun, Gauss telah membingungkan Euclid, dimana beliau menggambarkan polygon 17 sisi di dalam lingkaran dengan menggunakan jangka dan kompas, dan pada tahun 1801 di usia 24 tahun, Gauss mempublikasikan *Disquisitiones Arithmeticae* (Diskuisisi Aritmatika) yang mengulas sistematisasi studi teori bilangan yaitu sifat-sifat bilangan bulat (integer) dan merumuskan konsep-konsep dasarnya.

Fig. 2. Johann Carl Friedrich Gauss, matematikawan Jerman penemu metode Gaussian.

[2]Diambil dari https://id.wikipedia.org/wiki/Berkas Carl_Friedrich_Gauss_1840_by_Jensen.jpg

Penemuan Gauss mengenai teori matriks mengubah cara kerja para matematikawan selama dua abad terakhir.Prinsip dasar dalam eliminasi Gauss untuk sistem persamaan dalam bentuk matriks adalah perlakuan terhadap operasi baris pada suatu matriks, seperti penjumlahan, perkalian dengan konstanta, dan pertukaran baris. Sehingga untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut, perlu mengubah matriks menjadi bentuk eselon baris untuk memperoleh pola angka satu di bawah diagonal utama dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah, dan angka nol di setiap posisi di bawah diagonal utama sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (52).

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \tag{52}$$

Matriks ordo 2×2 Matriks ordo 3×3

Operasi baris yang sesuai dengan operasi persamaan untuk mendapatkan matriks baru yang setara dengan baris dalam bentuk yang lebih sederhana. Metode ini dilakukan melalui beberapa tahap sebagaimana berikut:

1. Pada setiap baris bukan nol, bilangan bukan nol pertama adalah 1.
2. Setiap baris yang semuanya nol ditempatkan di bagian bawah matriks.
3. Setiap nilai 1 berada di bawah dan di sebelah kanan awalan 1 sebelumnya.
4. Kolom apa pun yang berisi angka 1 di depannya memiliki nol di semua posisi lain di kolom.

Sehingga penyelesaian sistem persamaan dilakukan melalui operasi baris dalam pengubahan matriks koefisien ke bentuk eselon baris dan melakukan substitusi balik untuk mencari solusinya.

1. Pertukaran baris, $B_i \Leftrightarrow B_j$.
2. Kalikan dengan konstanta, cB_i.
3. Tambahkan hasil kali suatu baris dikalikan dengan konstanta ke baris lainnya dimana $B_i + cB_j$.

7.2 Penyelesaian Gauss untuk Matriks 2x2

Jika matriks yang ingin diselesaikan berordo 2×2 sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (53).

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 4x - 2y &= 5 \end{aligned} \tag{53}$$

Maka dapat dituliskan sebagai matriks sebagaimana persamaan (54).

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 4 & -2 & 5 \end{array}\right] \tag{54}$$

Sisi sebelah kiri pada matriks di atas disebut sebagai matriks koefisien. Penyelesaian menggunakan metode Gauss pertama kali harus melihat kemungkinan baris yang mudah untuk disedehanakan terlebih dahulu sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (55).

$$B_1 \Leftrightarrow B_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \tag{55}$$

Lalu cari nilai 1 sebagaimana pada persamaan (56).

$$B_1 - B_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4-3 & -2-4 & 5-7 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \tag{56}$$

Gunakan baris yang mempunyai nilai 1 untuk membuat nilai di akhir baris menjadi nilai 0, sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (57).

$$3B_1 - B_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -2 \\ 3(1)-3 & 3(-6)-4 & 3(-2)-7 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -2 \\ 0 & -22 & -13 \end{array}\right] \tag{57}$$

Kemudian jadikan nilai di sebelah nilai 0 sebagai nilai 1 sebagaimana persamaan (58).

$$-\tfrac{1}{22}B_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -2 \\ -\frac{1}{22}(0) & -\frac{1}{22}(-22) & -\frac{1}{22}(-13) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{13}{22} \end{array}\right] \tag{58}$$

Sehingga nilai variabel y adalah $\frac{13}{22}$, sedangkan untuk nilai x dicari menggunakan persamaan (59).

$$\begin{aligned} x - 6y &= -2 \\ y = \frac{13}{22} \Rightarrow x &= -2 + 6\left(\frac{13}{22}\right) \\ x &= -2 + \frac{78}{22} \\ x &= \frac{-44+78}{22} \\ x &= \frac{34}{22} \end{aligned} \tag{59}$$

Sehingga nilai-nilai variabel x dan y dari persamaan (53) adalah $\frac{13}{22}$ dan $\frac{34}{22}$ secara berurutan.

Tes 24: Cari nilai-nilai x dan y menggunakan eliminasi Gauss dari persamaan linier berikut ini:

$$\begin{aligned} -3x + 6y &= -4 \\ 2x + 5y &= 5 \end{aligned}$$

7.3 Penyelesaian Gauss untuk Matriks 3x3

Bagian ini akan menjelaskan cara penyelesaian matriks berordo 3×3 menggunakan eliminasi Gauss. Permasalahan sistem persamaan linier jika dituliskan sebagaimana persamaan (60).

$$\begin{aligned} x-y+z &= 8 \\ 2x+3y-z &= -2 \\ 3x-2y-9z &= 9 \end{aligned} \tag{60}$$

Maka matriks koefisien dan kolom hasil ditunjukkan sebagai matriks menurut persamaan (61).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right] \tag{61}$$

Persamaan (61) karena sudah mendapatkan nilai 1 di baris ke-1 dan kolom ke-1, maka selanjutnya membuat nol pada baris ke-2 dan ke-3 pada kolom ke-1, sehingga akan mendapatkan sebagaimana persamaan (62).

$$\begin{array}{r} -2B_1+B_2 \Rightarrow \\ -3B_1+B_3 \Rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ -2(1)+2 & -2(-1)+3 & -2(1)+(-1) & -2(8)+(-2) \\ -3(1)+3 & -3(-1)+(-2) & -3(1)+(-9) & -3(8)+9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \end{array}\right] \tag{62}$$

Persamaan (62) dapat dilihat bahwa baris ke-3 bisa dipindahkan ke baris 2 untuk menyesuaikan dengan pola yang diinginkan, sehingga persamaannya dapat dituliskan menurut persamaan (63).

$$B_2 \Leftrightarrow B_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \end{array}\right] \tag{63}$$

Kemudian untuk mendapatkan baris ke-3 dan kolom ke-2 bernilai 0 maka dilakukan sebagamana persamaan (64).

$$\begin{array}{r} -5B_2+B_3 \Rightarrow \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ -5(0)+0 & -5.1+5 & -5(-12)+(-3) & -5(-15)+(-18) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right] \tag{64}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa tinggal selangkah lagi untuk mendapatkan pola yang diinginkan, yaitu menjadikan baris ke-3 dan kolom ke-3 menjadi bernilai 1, sehingga matriks tersebut dapat dituliskan sebagaimana persamaan (65).

$$\frac{1}{57}B_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ \frac{1}{57}(0) & \frac{1}{57}(0) & \frac{1}{57}(57) & \frac{1}{57}(57) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{65}$$

Sehingga nilai variabel z adalah 1, selanjutnya nilai y dan x dapat dicari menggunakan persamaan (66).

$$\begin{aligned} y+(-12)(1) &= -15 \\ y &= -15+12 \\ y &= -3 \\ x-y+z &= 8 \\ x &= 8+y-z \\ x &= 8+(-3)-1 \\ x &= 4 \end{aligned} \tag{66}$$

Sehingga nilai-nilai variabel x, y, dan z dari persamaan (60) adalah 4, -3, dan 1, secara berurutan.

Tes 25: Cari nilai-nilai x, y, dan z menggunakan eliminasi Gauss dari persamaan linier berikut ini:

$$\begin{aligned} 10x+3y-5z &= 2 \\ -2x-5y+z &= -7 \\ -6x+4y+3Z &= 4 \end{aligned}$$

8. METODE GAUSS-JORDAN

Tujuan:
Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan sistem linier dengan metode invers, metode cramer, dan gauss-jordan.
Indikator:
Ketepatan menyelesaikan persoalan sistem linier dengan metode gauss-jordan.

8.1 Eliminasi Gauss-Jordan

Metode yang lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linier adalah metode Gauss-Jordan. Metode yang digunakan masih menggunakan sebagian dari metode Gauss yang berupa matriks segitiga bawah, namun pada metode Gauss-Jordan kemudian diperluas pada matriks segitiga atas sehingga membentuk matriks identitas. Metode eliminasi Gauss-Jordan kurang efisien untuk menyelesaikan sebuah sistem persamaan linier, namun lebih efisien daripada eliminasi Gauss. Metode tersebut dinamai Eliminasi Gauss-Jordan untuk menghormati Johann Carl Friedrich Gauss dan Wilhelm Jordan. Wilhelm Jordan (lihat gambar 3)[3] (1842-1899) adalah seorang insinyur Jerman yang ahli dalam bidang geodesi. Sumbangannya untuk penyelesaian sistem linear dalam buku populernya, *Handbuch de Vermessungskunde* (Buku panduan Geodesi) pada tahun 1988.

Fig. 3. Wilhelm Jordan, geodesis Jerman penemu eliminasi Gauss-Jordan.

Metode eliminasi Gauss-Jordan mempunyai prinsip yang mirip dengan prinsip metode eliminasi Gauss yang bergantung pada tiga operasi baris dasar eliminasi menggunakan matriks, yaitu:

[3]Diambil dari https://pictures.abebooks.com/inventory/31403899483.jpg

1. Tukar posisi dua baris,
2. Kalikan salah satu baris dengan skalar bukan nol,
3. Menambah atau mengurangi kelipatan skalar dari satu baris ke baris lainnya.

8.2 Penyelesaian Gauss-Jordan untuk Matriks 2x2

Misalkan diketahui suatu persamaan (67).

$$\begin{aligned} 3x+4y &= 7 \\ 4x-2y &= 5 \end{aligned} \tag{67}$$

Maka dapat dituliskan sebagai matriks sebagaimana persamaan (68).

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 4 & -2 & 5 \end{array}\right] \tag{68}$$

Karena mempunyai prinsip yang sama di awal dengan metode Gauss maka penyederhanaan untuk mendapatkan pola dapat dituliskan sebagaimana pada persamaan (69).

$$B_1 \Leftrightarrow B_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \tag{69}$$

Lalu cari nilai 1 sebagaimana pada persamaan (70).

$$B_1 - B_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4-3 & -2-4 & 5-7 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \tag{70}$$

Kemudian baris yang mempunyai nilai 1 digunakan untuk membuat nilai 0 pada baris yang lain, sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (71).

$$3B_1 - B_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -2 \\ 3(1)-3 & 3(-6)-4 & 3(-2)-7 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -2 \\ 0 & -22 & -13 \end{array}\right] \tag{71}$$

Kemudian jadikan nilai di sebelah nilai 0 sebagai nilai 1 sebagaimana persamaan (72).

$$-\tfrac{1}{22}B_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -2 \\ -\frac{1}{22}(0) & -\frac{1}{22}(-22) & -\frac{1}{22}(-13) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{13}{22} \end{array}\right] \tag{72}$$

Sampai di sini model yang digunakan masih mirip dengan metode Gauss, kemudian dilanjutkan untuk mencari nilai 0 pada posisi nilai -6 merupakan metode Gauss-Jordan sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (73).

$$6B_2 + B_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 6(0)+1 & 6(1)+(-6) & 6(\frac{13}{22})+(-2) \\ 0 & 1 & \frac{13}{22} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{34}{22} \\ 0 & 1 & \frac{13}{22} \end{array}\right] \tag{73}$$

Sehingga nilai-nilai variabel x dan y dari persamaan (67) adalah $\frac{13}{22}$ dan $\frac{34}{22}$ secara berurutan.

Tes 26: Cari nilai-nilai x dan y menggunakan eliminasi Gauss-Jordan dari persamaan linier berikut ini:

$$\begin{aligned} 3x-6y &= 4 \\ -2x+5y &= -5 \end{aligned}$$

8.3 Penyelesaian Gauss-Jordan untuk Matriks 3x3

Permasalahan sistem persamaan linier jika dituliskan sebagaimana persamaan (74).

$$\begin{aligned} x-y+z &= 8 \\ 2x+3y-z &= -2 \\ 3x-2y-9z &= 9 \end{aligned} \tag{74}$$

Maka matriks koefisien dan kolom hasil ditunjukkan sebagai matriks menurut persamaan (75).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right] \tag{75}$$

Persamaan (75) karena sudah mendapatkan nilai 1 di baris ke-1 dan kolom ke-1, maka selanjutnya membuat nol pada baris ke-2 dan ke-3 pada kolom ke-1, sehingga akan mendapatkan sebagaimana persamaan (76).

$$\begin{array}{r} -2B_1+B_2 \Rightarrow \\ -3B_1+B_3 \Rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ -2(1)+2 & -2(-1)+3 & -2(1)+(-1) & -2(8)+(-2) \\ -3(1)+3 & -3(-1)+(-2) & -3(1)+(-9) & -3(8)+9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \end{array}\right] \tag{76}$$

Persamaan (76) dapat dilihat bahwa baris ke-3 bisa dipindahkan ke baris 2 untuk menyesuaikan dengan pola yang diinginkan, sehingga persamaannya dapat dituliskan menurut persamaan (77).

$$B_2 \Leftrightarrow B_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \end{array}\right] \tag{77}$$

Kemudian untuk mendapatkan baris ke-3 dan kolom ke-2 bernilai 0 maka dilakukan sebagamana persamaan (78).

$$\begin{aligned} -5B_2+B_3 \Rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ -5(0)+0 & -5.1+5 & -5(-12)+(-3) & -5(-15)+(-18) \end{array}\right] \\ \Rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right] \end{aligned} \tag{78}$$

Lalu menjadikan baris ke-3 dan kolom ke-3 menjadi bernilai 1, sehingga matriks tersebut dapat dituliskan sebagaimana persamaan (79).

$$\frac{1}{57}B_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ \frac{1}{57}0 & \frac{1}{57}0 & \frac{1}{57}57 & \frac{1}{57}57 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{79}$$

Sehingga nilai variabel z adalah 1, selanjutnya nilai y dan x dapat dicari menggunakan persamaan (80).

$$\begin{aligned} 12B_3+B_2 \Rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 12(0)+0 & 12(0)+1 & 12(1)+(-12) & 12(1)+(-15) \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ \Rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{aligned} \tag{80}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan solusi baris ke-1 diperoleh menggunakan persamaan (81).

$$-B_3+B_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -0+1 & -0+(-1) & -1+1 & -1+8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{81}$$

Langkah terakhir untuk baris ke-1 diperoleh menurut persamaan (82).

$$B_2+B_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0+1 & 1+(-1) & 0+0 & -3+7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{82}$$

Sehingga nilai-nilai variabel x, y, dan z dari persamaan (75) adalah 4, -3, dan 1, secara berurutan.

Tes 27: Cari nilai-nilai x, y, dan z menggunakan eliminasi Gauss-Jordan dari persamaan linier berikut ini:

$$\begin{aligned} -5x+3y-5z &= 4 \\ 2x-5y+3z &= 7 \\ 5x-2y+3Z &= -5 \end{aligned}$$

9. OPERASI DOT PRODUCT

Tujuan:
Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan sistem aljabar vector (dot product dan cross product).
Indikator:
Ketepatan menyelesaikan persoalan sistem aljabar vector berupa operasi dot product.

9.1 Dot Product Vektor

Vektor merupakan suatu besaran mempunyai besar dan arah. Beberapa operasi model dari dot product pada vektor adalah penjumlahan dan perkalian. Perkalian vektor dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu perkalian titik (*dot*) dan perkalian silang (*cross* - akan dibahas pada bab berikutnya). Perkalian *dot* disebut juga sebagai perkalian skalar yang dapat diberikan melalui dua model, yaitu model secara aljabar dan geometri. Model secara aljabar, perkalian titik didefinisikan sebagai jumlah perkalian masukan-masukan yang bersesuaian dari dua barisan bilangan. Secara geometris, besaran tersebut adalah hasil kali besaran Euclidean dua vektor dan kosinus sudut di antara keduanya. Kedua istilah model tersebut berlaku sama ketika bekerja dengan koordinat Cartesian. Namun, perkalian titik dua vektor adalah hasil kali besar kedua vektor dan cos sudut di antara keduanya, sebagaimana ditunjukkan pada gambar 4.

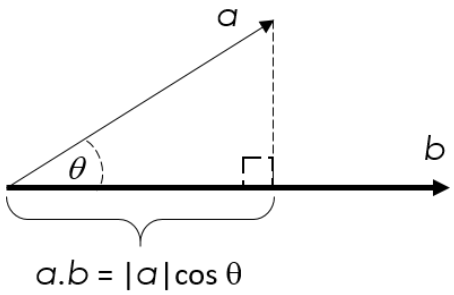

Fig. 4. Dot product vektor.

Perbedaan antara perkalian *dot* dan *cross* adalah,

- Produk skalar vektor atau produk titik (*dot*),
- Perkalian vektor dari vektor atau perkalian silang (*cross*).

Perbedaan kedua metode tersebut hanya terletak pada metode pertama diperoleh nilai skalar sebagai resultan, sedangkan metode kedua nilai yang diperoleh kembali bersifat vektor.

Produk skalar dari dua vektor a dan b dari magnitudo $\mid a \mid$ dan $\mid b \mid$ diberikan menurut persamaan (83).

$$a \cdot b = \mid a \mid\mid b \mid \cos\theta \tag{83}$$

Dimana $\mid a \mid$ dan $\mid b \mid$ merupakan magnitudo vektor a dan b, cos merupakan kosinus sudut antara dua vektor, sedangkan θ merupakan sudut antara vektor a dan b. Sedangkan dot product dari dua vektor 3 dimensi dan n dimensi seterusnya dapat dituliskan sebagai persamaan (84).

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\ a \cdot b &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \end{aligned} \tag{84}$$

Sehingga jika diketahui suatu himpunan dari A dan B yang merupakan dua vektor, dimana $A = a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ dan $B = b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ maka dapat dicontohkan sebagaimana persamaan (85).

$$\begin{aligned} A = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k} \quad \text{dan} \quad B &= -4\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k} \\ \mid A \mid \cdot \mid B \mid &= (2-4) + (-4+7) + (5+2) \\ \mid A \mid \cdot \mid B \mid &= 8 \end{aligned} \tag{85}$$

Tes 28: Diketahui dua buah vektor [3, -2, 4] dan [-2, 5, -6]. Cari dot product dari vektor-vektor tersebut.

Tes 29: Diketahui dua buah vektor $\mid A \mid = 5$, $\mid B \mid = 3$, dan $\theta = 45^\circ$. Cari dot product dari vektor-vektor tersebut.

9.2 Sifat-Sifat Dot Product Vektor

Sifat-sifat dari dot product atau perkalian skalar sebagaimana berikut,

1. Komutatif, ditunjukkan sebagaimana persamaan (86).

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ &= (b_1, b_2, b_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) \\ &= B \cdot A \end{aligned} \tag{86}$$

2. Perkalian Skalar, dimana c merupakan konstanta atau variabel untuk $(cA) \cdot B = A \cdot$

$(cB) = c(A \cdot B)$, pembuktiannya sebagaimana persamaan (87).

$$\begin{aligned} c(A \cdot B) &= c(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= (ca_1)b_1 + (ca_2)b_2 + (ca_3)b_3 \\ &= (ca_1, ca_2, ca_3) \cdot (cb_1, cb_2, cb_3) \\ &= c(a_1b_1) + c(a_2b_2) + c(a_3b_3) \\ &= c(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\ &= (cA) \cdot B \end{aligned} \tag{87}$$

3. Distributif, jika ada 3 vektor maka persamaannya dapat dtunjukkan menurut persamaan (88).

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \tag{88}$$

4. Magnitudo, untuk $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, perkalian titik $A \cdot A$ merupakan jumlah kuadrat setiap masukan. Jika A berada di suatu n-ruang, maka panjang A atau ditulis sebagai $| A |$ merupakan akar kuadrat dari $A \cdot A$ atau $| A |^2$, sebagaimana dituliskan menurut persamaan (89).

$$\begin{aligned} | A | \cdot | A | &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) \\ &= (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \\ &= \left| \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \right|^2 \\ &= | A |^2 \end{aligned} \tag{89}$$

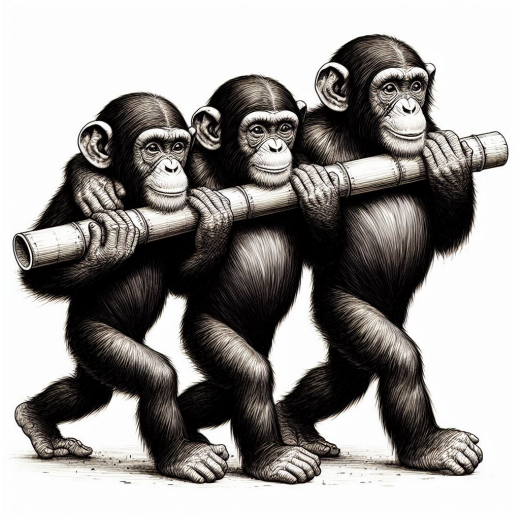

Fig. 5. Permainan bambu gila.

Tes 30: Ada tiga simpanse sedang bermain bambu gila sebagaimana ditunjukkan pada gambar 5. Simpanse pertama mendorong dengan gaya $F_1 = (20\hat{i} - 16\hat{j} + 9\hat{k})$ Newton, lalu simpanse kedua mendorong gaya $F_2 = (-35\hat{i} + 25\hat{j} + 43\hat{k})$ Newton, dan simpanse ketiga mendorong dengan gaya $F_3 = (30\hat{i} + 27\hat{k})$ Newton. Tentukan:

1. Hitung dot product masing-masing vektor dan magnitudo masing-masing gaya F_1, F_2 dan F_3?
2. Berapakah sudut yang dibentuk antara gaya F_1 dan F_2?

10. OPERASI CROSS PRODUCT

Tujuan:
Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan sistem aljabar vector (dot product dan cross product).
Indikator:
Ketepatan menyelesaikan persoalan sistem aljabar vector berupa operasi cross product.

10.1 Cross Product Vektor

Perkalian silang (*cross product*) pada umumnya digunakan untuk menentukan vektor yang tegak lurus terhadap permukaan bidang antara dua vektor. Perkalian ini sering digunakan terutama untuk vektor 3 dimensi (3D) dengan menghitung ortogonal antara 2 vektor. Arah perkalian silang dapat menunjuk ke arah yang sepenuhnya berlawanan dan tetap tegak lurus terhadap dua vektor lainnya, sehingga membentuk kaidah tangan kanan sebagaimana digambarkan menurut gambar 6.

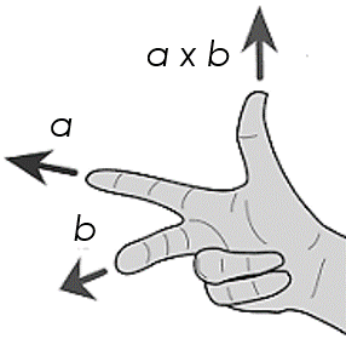

Fig. 6. Kaidah tangan kanan.

Jika diketahui dua vektor a dan b maka persamaan perkalian silangnya ditunjukkan sebagaimana persamaan (90).

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \\ \vec{a}\times\vec{b} &= \vec{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \vec{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned} \tag{90}$$

Dengan kaidah tangan kanan, arahkan jari telunjuk ke vektor a, dan arahkan jari tengah ke vektor b, sehingga membentuk perkalian silang searah dengan ibu jari. Maka dapat

dituliskan menurut persamaan (91).

$$
\begin{aligned}
&| a \times b | = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2} \\
&= \sqrt{(a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3) + (a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3) + (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2)} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\left[1 - \frac{((a_1 + a_2 + a_3)(b_1b_2b_3))^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}\right]} \\
&= | a || b | \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
&= | a || b | \sin\theta
\end{aligned}
\tag{91}
$$

Sehingga dua vektor a dan b tersebut ketika melakukan perkalian silangnya dapat dituliskan menurut persamaan (92).

$$a \times b = | a || b | \sin(\theta)n \tag{92}$$

Simbol $| a |$ merupakan magnitudo atau panjang dari vektor a, sedangkan $| b |$ merupakan magnitudo atau panjang dari vektor b. Lalu simbol θ merupakan sudut antara a dan b, sedangkan n adalah vektor satuan yang tegak lurus terhadap a dan b. Hal ini menunjukkan bahwa besar hasil kali silang adalah luas jajar genjang yang dibentuk oleh penggunaan dua vektor tertentu. Hasil kali tiga vektor disebut hasil kali triple, dengan kata lain, perkalian silang suatu vektor dengan perkalian silang dua vektor lainnya. Jika mempunyai tiga vektor A, B, dan C dapat dilambangkan sebagaimana persamaan (93).

$$
\begin{aligned}
A \times (B \times C) &= (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \\
(A \times B) \times C &= -C \times (A \times B) = -(C \cdot B)A + (C \cdot A)B
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Tes 31: Tentukan $a \times b$, jika diketahui $a = -3\vec{i} + 2\vec{k}$ dan $b = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Tes 32: Tentukan magnitudo a jika diketahui $a = -(\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{k})$.

10.2 Sifat-Sifat Cross Product

Sifat-sifat dari cross product atau perkalian silang sebagaimana berikut,

1. Anti komutatif, sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (94).

$$
\begin{aligned}
A &= a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k} \text{ , dan } B = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k} \\
A\times B &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \\
&= (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k} \\
B\times A &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \\
&= (b_2a_3-b_3a_2)\vec{i}-(b_1a_3-b_3a_1)\vec{j}+(b_1a_2-b_2a_1)\vec{k} \\
&= -\left[(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\right] \\
&= -A\times B
\end{aligned}
\tag{94}
$$

2. Distributif, sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (95).

$$
\begin{aligned}
A\times(B+C) &= A\times B+A\times C \\
A = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k} &\text{ , } B = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k} \text{ , dan } C = c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k} \\
A\times B+A\times C &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\
&= (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}+ \\
&\quad (a_2c_3-a_3c_2)\vec{i}-(a_1c_3-a_3c_1)\vec{j}+(a_1c_2-a_2c_1)\vec{k} \\
&= (a_2b_3-a_3b_2+a_2c_3-a_3c_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1-a_1c_3-a_3c_1)\vec{j}+ \\
&\quad (a_1b_2-a_2b_1+a_1c_2-a_2c_1)\vec{k} \\
&= A\times(B+C)
\end{aligned}
\tag{95}
$$

3. Jakobi, sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (96).

$$
A\times(B\times C)+B\times(C\times A)+C\times(A\times B) = 0 \tag{96}
$$

4. Vektor nol, sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (97).

$$
\begin{aligned}
a \times b = 0, &\text{jika } a = 0 \text{atau } b = 0 \\
\text{Diketahui } A = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} &\text{dan } B = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \\
A \times B &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \\
&= (0-0)\vec{i} - (0-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{97}
$$

Tes 33: Jika diketahui A = -$\vec{i}$ + 2$\vec{j}$ + 3$\vec{k}$, $B = 4\vec{i}$ - 3$\vec{j}$ - 2$\vec{k}$, C = 2$\vec{i}$ + $\vec{j}$ + $\vec{k}$. Tentukan $A \times (B \times C)$, jika $A \times (B \times C)$ = $(A \cdot C)B$ - $(A \cdot B)C$.

11. NILAI EIGEN & VEKTOR EIGEN

Tujuan:
Mahasiswa mampu menghitung Eigen Value dan Eigen Vector pada sistem linier dari matriks.
Indikator:
Ketepatan menghitung Eigen Value dan Eigen Vector pada sistem linier dari matriks.

11.1 Nilai Eigen & Vektor Eigen

Nilai eigen adalah nilai skalar yang terkait dengan vektor eigen dalam transformasi linier. Kata 'Eigen' berasal dari bahasa Jerman yang berarti 'karakteristik'. Oleh karena itu, ini adalah nilai karakteristik yang menunjukkan faktor yang merentangkan vektor eigen ke arahnya. Ini tidak melibatkan perubahan arah vektor kecuali jika nilai eigennya negatif. Ketika nilai eigennya negatif, arahnya justru sebaliknya. Persamaan (98) menunjukkan nilai eigen.

$$Av = \lambda v \tag{98}$$

Dimana A merupakan suatu matriks, v merupakan vektor eigen, dan λ merupakan nilai eigen.

Vektor eigen untuk matriks persegi didefinisikan sebagai nilai vektor bukan nol (0) yang bila dikalikan dengan matriks persegi akan menghasilkan kelipatan skala dari vektor tersebut, yaitu jika mendefinisikan vektor eigen untuk matriks A menjadi v jika memenuhi syarat $Av = \lambda v$.

Kelipatan skaler λv dalam kasus ini disebut sebagai nilai eigen matriks persegi. Pencarian nilai eigen matriks persegi harus dicari terlebih dahulu sebelum mencari vektor eigen matriks tersebut. Untuk setiap matriks persegi, A berordo n×n, vektor eigennya adalah matriks kolom berordo $n \times 1$. Jika mencari vektor eigen dari matriks A melalui $Av = \lambda v$, v dalam hal ini disebut vektor eigen kanan dari matriks A dan selalu dikalikan ke ruas kanan karena perkalian matriks tidak bersifat komutatif. Secara umum, ketika menemukan vektor eigen, vektor eigennya selalu merupakan vektor eigen kanan. Sedangkan, pencarian vektor eigen kiri matriks persegi A menggunakan relasi $vA = v\lambda$, dimana v merupakan vektor eigen kiri dan selalu dikalikan ke ruas kiri. Jika matriks A berorde $n \times n$ maka v adalah matriks kolom berorde $1 \times n$.

Persamaan vektor eigen merupakan persamaan yang digunakan untuk mencari vektor eigen suatu matriks persegi. Matriks identitas dengan urutan yang sama dapat menggunakan persamaan (99).

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{99}$$

Hasil persamaan (99) dapat beberapa nilai λ, yaitu $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Nilai-nilai tersebut merupakan nilai-nilai eigen sedangkan vektor eigen dapat diperoleh melalui setiap nilai eigen.

Hasil penyederhanaan persamaan tersebut dapat diperoleh matriks v yang merupakan matriks kolom berordo $n \times 1$ sebagaimana dituliskan menurut persamaan (100).

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{100}$$

Agar suatu persamaan (99) memiliki solusi tidak nol, maka harus diketahui bahwa determinan persamaan tersebut sebagaimana persamaan (102).

$$det(A - \lambda I) = 0 \tag{101}$$

Persamaan ini disebut sebagai persamaan karakteristik dari matriks A, sedangkan λ merupakan akar-akar karaketristik.

11.2 Vektor Eigen Matriks 2x2

Jika diketahui matriks sebagaimana persamaan (102).

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \tag{102}$$

Maka nilai Eigen direpresentasikan sebagai λ, sedangkan vektor Eigen direpresentasikan sebagai v, sebagaimana dituliskan persamaan (103).

$$\begin{aligned} |A| - \lambda I &= 0 \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (3-\lambda)(2-\lambda) - 5 \cdot 4 &= 0 \\ 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 20 &= 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda - 14 &= 0 \\ (\lambda - 7)(\lambda + 2) &= 0 \\ \lambda = 7 \text{ dan } \lambda &= -2 \end{aligned} \tag{103}$$

Jadi nilai eigen diperoleh 7 dan -2, kemudian untuk mendapatkan vektor eigen dituliskan sebagai persamaan (104).

$$\begin{aligned} [A - \lambda I]\, v &= 0 \\ \text{untuk } \lambda = 7 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} &\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{104}$$

Sehingga diperoleh suatu persamaan sebagaimana ditunjukkan persamaan (105).

$$\begin{aligned} -4a+5b &= 0 \\ a = \frac{5}{4}b \text{ dan } b = 1, \text{ sehingga solusinya: } a &= \frac{5}{4}t, b = t, t \in Riil \end{aligned} \tag{105}$$

Dan vektor eigen v dituliskan sebagaimana persamaan (106).

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{membentuk ruang eigen E(7)} = \left(v = t \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix}, t \in Riil \right) \tag{106}$$

Sedangkan untuk $\lambda = -2$ diselesaikan pada persamaan (107).

$$\text{untuk } \lambda = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \tag{107}$$

Sehingga diperoleh suatu persamaan sebagaimana ditunjukkan persamaan (108).

$$\begin{aligned} 5a+5b &= 0 \\ 4a+4b &= 0 \end{aligned} \tag{108}$$

Menggunakan eliminasi didapatkan $a = -1$ dan $b = 1$, solusinya: $-a = b = t, t \in Riil$. Dan vektor eigen v dituliskan sebagaimana persamaan (109).

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{membentuk ruang eigen E(-2)} = \left(v = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in Riil \right) \tag{109}$$

Tes 34: Carilah nilai-nilai eigen dan ruang eigen jika diketahui suatu matriks A sebagai berikut,

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

11.3 Vektor Eigen Matriks 3x3

Jika diketahui suatu matrik berorodo 3×3 sesuai persamaan (110).

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 0 & 12 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \tag{110}$$

Sehingga untuk mencari nilai-nilai eigen dan vektor eigennya ditunjukkan langkah awal sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (111).

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 0 & 12 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 3 & 8 \\ 0 & 12-\lambda & 8 \\ 0 & 6 & 1-\lambda \end{bmatrix} \tag{111}$$

Sehingga untuk mencari nilai determinannya ditunjukkan menurut persamaan (112).

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow det\begin{bmatrix} -\lambda & 3 & 8 \\ 0 & 12-\lambda & 8 \\ 0 & 6 & 1-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ -\lambda\begin{vmatrix} 12-\lambda & 8 \\ 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 0 & 12-\lambda \\ 0 & 6 \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned} \tag{112}$$

Maka akan didapatkan persamaan (113).

$$\begin{aligned} -\lambda((12-\lambda)(1-\lambda)-8\cdot 6)-3(0(1-\lambda)-8\cdot 0)+8(0\cdot 6-(12-\lambda)\cdot 0) &= 0 \\ -\lambda((12-\lambda)(1-\lambda)-8\cdot 6)-3(0-0)+8(0-0) &= 0 \\ -\lambda((\lambda-12)(\lambda-1)-48) &= 0 \\ -\lambda(\lambda^2-\lambda-12\lambda+12-48) &= 0 \\ -\lambda(\lambda^2-13\lambda-36) &= 0 \end{aligned} \tag{113}$$

Dari persamaan di atas dapat secara langsung mengetahui nilai eigen $\lambda_1 = 0$, sedangkan nilai-nilai eigen lainnya dapat dicari menggunakan persamaan (114).

$$\begin{aligned} \lambda_{2\&3} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \text{untuk } a=1, b=-13, \text{dan } c=-36 \\ \lambda_{2\&3} &= \frac{-(-13) \pm \sqrt{13^2-4\cdot 1\cdot(-36))}}{2(1)} \\ \lambda_{2\&3} &= \frac{13 \pm \sqrt{313}}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{13-\sqrt{313}}{2} \text{ dan } \lambda_3 = \frac{13+\sqrt{313}}{2} \end{aligned} \tag{114}$$

Sehingga vektor eigen dari nilai-nilai eigen tersebut dapat diketahui sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (115). Untuk $\lambda_1 = 0$,

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 3 & 8 \\ 0 & 12-\lambda & 8 \\ 0 & 6 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 0 & 12-0 & 8 \\ 0 & 6 & 1-0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 0 & 12 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \tag{115}$$

Lalu nilai-nilai eigen tersebut digunakan untuk mencari vektor eigen sebagaimana persamaan (116).

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 0 & 12 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{116}$$

Gunakan eliminasi Gauss untuk mencari nilai a, b, dan c sebagaimana persamaan (117).

$$\tfrac{1}{3}b_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(0) & \frac{1}{3}(3) & \frac{1}{3}(8) \\ 0 & 12 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 12 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \tag{117}$$

Lalu eliminasi Gauss untuk baris ke-2 sebagaimana persamaan (118).

$$\begin{aligned} 12b_1 - b_2 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ 12(0)-0 & 12(1)-12 & 12(\frac{8}{3})-8 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{24}b_2 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ \frac{1}{24}(0) & \frac{1}{24}(0) & \frac{1}{24}24 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{118}$$

Lalu jadikan baris ke-1 dan kolom ke-3 menjadi bernilai 1, sebagaimana persamaan (119).

$$b_1 - \tfrac{8}{3}b_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0-\frac{8}{3}(0) & 1-\frac{8}{3}(0) & \frac{8}{3}-\frac{8}{3}1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \tag{119}$$

Lalu untuk baris ke-3 diperoleh persamaan (120).

$$\begin{aligned} b_3 - 6b_1 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0-6(0) & 6-6(1) & 1-6(0) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ b_3 - b_2 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0-0 & 0-0 & 1-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{120}$$

Maka untuk nilai $\lambda_1 = t$, $\lambda_2 = 0$, dan $\lambda_3 = 0$, sehingga didapatkan ruang eigen sebagaimana persamaan (121).

$$v = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{121}$$

Persamaan di atas merupakan ruang nol. Nulitas suatu matriks adalah dimensi basis ruang nol, sehingga nulitas matriks tersebut adalah 1.

Berikutnya mencari vektor eigen untuk nilai eigen $\lambda_2 = \frac{13-\sqrt{313}}{2}$ ditunjukkan pada persamaan (122).

$$\begin{bmatrix} 0-\frac{13-\sqrt{313}}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 12-\frac{13-\sqrt{313}}{2} & 8 \\ 0 & 6 & 1-\frac{13-\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-13+\sqrt{313}}{2} & 3 & 8 \\ 0 & \frac{11+\sqrt{313}}{2} & 8 \\ 0 & 6 & \frac{-11+\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \tag{122}$$

Sehingga didapatkan persamaan (123).

$$\begin{bmatrix} \frac{-13+\sqrt{313}}{2} & 3 & 8 \\ 0 & \frac{11+\sqrt{313}}{2} & 8 \\ 0 & 6 & \frac{-11+\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{123}$$

Lalu akan didapatkan persamaan menggunakan penyelesaian eliminasi Gauss sebagaimana persamaan (124).

$$\begin{aligned}\tfrac{13+\sqrt{313}}{72}b_1 \Rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{13+\sqrt{313}}{72} & \frac{-13+\sqrt{313}}{2} & \frac{13+\sqrt{313}}{72}3 & \frac{13+\sqrt{313}}{72}8 \\ 0 & & \frac{11+\sqrt{313}}{2} & 8 \\ 0 & & 6 & \frac{-11+\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & \frac{13+\sqrt{313}}{24} & \frac{13+\sqrt{313}}{9} \\ 0 & \frac{11+\sqrt{313}}{2} & 8 \\ 0 & 6 & \frac{-11+\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{124}$$

Lalu untuk mendapatkan nilai 1 di baris ke-2 dan kolom ke-2 maka ditunjukkan melalui persamaan (125).

$$\begin{aligned}\tfrac{-11+\sqrt{313}}{96}b_2 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & \frac{13+\sqrt{313}}{24} & \frac{13+\sqrt{313}}{9} \\ \frac{-11+\sqrt{313}}{96}0 & \frac{-11+\sqrt{313}}{96}\frac{11+\sqrt{313}}{2} & \frac{-11+\sqrt{313}}{96}8 \\ 0 & 6 & \frac{-11+\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & \frac{13+\sqrt{313}}{24} & \frac{13+\sqrt{313}}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-11+\sqrt{313}}{12} \\ 0 & 6 & \frac{-11+\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{125}$$

Kemudian baris ke-3 bisa dilakukan operasi menggunakan baris ke-2 sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (126).

$$\begin{aligned}b_3 - 6\cdot b_2 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & \frac{13+\sqrt{313}}{24} & \frac{13+\sqrt{313}}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-11+\sqrt{313}}{12} \\ 0-6\cdot 0 & 6-6\cdot 1 & \frac{-11+\sqrt{313}}{2} - 6\frac{-11+\sqrt{313}}{12}. \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & \frac{13+\sqrt{313}}{24} & \frac{13+\sqrt{313}}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-11+\sqrt{313}}{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{126}$$

Kemudian baris ke-1 dan kolom ke-2 dijadikan bernilai 0 melalui persamaan (127).

$$\begin{aligned}b_1 - \tfrac{13+\sqrt{313}}{24}b_2 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1-\frac{13+\sqrt{313}}{24}0 & \frac{13+\sqrt{313}}{24} - \frac{13+\sqrt{313}}{24}1 & \frac{13+\sqrt{313}}{9} - \frac{13+\sqrt{313}}{24}\frac{-11+\sqrt{313}}{12} \\ 0 & 1 & \frac{-11+\sqrt{313}}{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{41+5\sqrt{313}}{48} \\ 0 & 1 & \frac{-11+\sqrt{313}}{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{127}$$

Sehingga persamaan liniernya dapat dituliskan menurut persamaan (128).

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \frac{41+5\sqrt{313}}{48}\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{41+5\sqrt{313}}{48}\lambda_3 \\ \lambda_2 + \frac{-11+\sqrt{313}}{12}\lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{-11+\sqrt{313}}{12}\lambda_3 \end{aligned} \tag{128}$$

maka dapat dituliskan vektor eigennya sebagaimana persamaan (129).

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-41-5\sqrt{313}}{48} \\ \frac{11-\sqrt{313}}{12} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{129}$$

Kemudian untuk mencari vektor eigen dengan nilai eigen $\lambda_3 = \frac{13+\sqrt{313}}{2}$ sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (130).

$$\begin{aligned} (A-\lambda_3 I)v = 0 \\ \begin{bmatrix} \frac{-13-\sqrt{313}}{2} & 3 & 8 \\ 0 & \frac{11-\sqrt{313}}{2} & 8 \\ 0 & 6 & \frac{-11-\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{130}$$

Untuk menjadikan baris ke-1 dan kolom ke-1 bernilai 1 menggunakan eliminasi Gaussian ditunjukkan pada persamaan (131).

$$\begin{aligned} \frac{13-\sqrt{313}}{72}b_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-13-\sqrt{313}}{2}\frac{13-\sqrt{313}}{72} & \frac{13-\sqrt{313}}{72}3 & \frac{13-\sqrt{313}}{72}8 \\ 0 & \frac{11-\sqrt{313}}{2} & 8 \\ 0 & 6 & \frac{-11-\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{13-\sqrt{313}}{24} & \frac{13-\sqrt{313}}{9} \\ 0 & \frac{11-\sqrt{313}}{2} & 8 \\ 0 & 6 & \frac{-11-\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{131}$$

kemudian baris ke-2 dan kolom ke-2 dijadikan bernilai 1 ditemukan melalui persamaan (132).

$$\begin{aligned} \frac{-11-\sqrt{313}}{96}b_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{13-\sqrt{313}}{24} & \frac{13-\sqrt{313}}{9} \\ \frac{-11-\sqrt{313}}{96}0 & \frac{-11-\sqrt{313}}{96}\frac{11-\sqrt{313}}{2} & \frac{-11-\sqrt{313}}{96}8 \\ 0 & 6 & \frac{-11-\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{13-\sqrt{313}}{24} & \frac{13-\sqrt{313}}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-11-\sqrt{313}}{12} \\ 0 & 6 & \frac{-11-\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{132}$$

Kemudian baris ke-3 bisa dijadikan bernilai nol dengan mengurangkan dan mengalikan dengan baris ke-2 sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (133).

$$\begin{aligned} b_3 - 6b_2 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & \frac{13-\sqrt{313}}{24} & \frac{13-\sqrt{313}}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-11-\sqrt{313}}{12} \\ 0-6(0) & 6-6(1) & \frac{-11-\sqrt{313}}{2} - 6 \cdot \frac{-11-\sqrt{313}}{2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & \frac{13-\sqrt{313}}{24} & \frac{13-\sqrt{313}}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-11-\sqrt{313}}{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{133}$$

lalu untuk baris ke-1 dapat diperoleh menurut persamaan (134).

$$\begin{aligned} & b_1 + \tfrac{-13+\sqrt{313}}{24} b_2 \Rightarrow \\ & \begin{bmatrix} 1 + \frac{-13+\sqrt{313}}{24}(0) & \frac{13-\sqrt{313}}{24} + \frac{-13+\sqrt{313}}{24}(1) & \frac{13-\sqrt{313}}{9} + \frac{-13+\sqrt{313}}{24}\frac{-11-\sqrt{313}}{12} \\ 0 & 1 & \frac{-11-\sqrt{313}}{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{41-5\sqrt{313}}{48} \\ 0 & 1 & \frac{-11-\sqrt{313}}{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{134}$$

Kemudian dapat disederhanakan menjadi persamaan (135).

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \frac{-41+5\sqrt{313}}{48}\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \frac{11+5\sqrt{313}}{12}\lambda_3 = 0 \end{aligned} \tag{135}$$

Maka akan diperoleh vektor eigen sebagaimana persamaan (136).

$$v_3 = \begin{bmatrix} \frac{-41+5\sqrt{313}}{48} \\ \frac{11+\sqrt{313}}{12} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{136}$$

Tes 35: Carilah nilai-nilai eigen dan ruang eigen jika diketahui suatu matriks B sebagai berikut,

$$\text{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

12. APLIKASI EIGEN VALUE & EIGEN VECTOR

Tujuan:
Mahasiswa mampu menganalisa Eigen Value dan Eigen Vector dengan pemahaman aplikatif.
Indikator:
Ketepatan menganalisa Eigen Value dan Eigen Vector pada sistem linier dari matriks.

12.1 Pemrosesan Gambar Digital

Pemrosesan gambar merupakan salah satu teknik yang cukup ampuh dalam rekayasa gambar digital. Konsep nilai eigen dan vektor eigen dapat membantu melakukan pekerjaan seperti pengenalan, kompresi, dan segmentasi gambar digital. Pengenalan gambar merupakan proses identifikasi dan klasifikasi objek suatu gambar. Salah satu cara untuk mencapai hal ini adalah dengan menggunakan metode eigen-faces (untuk objek wajah), yang menggunakan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks kovarians untuk menemukan fitur yang paling mewakili sebuah objek. Matriks kovarians mengukur bagaimana nilai piksel suatu citra wajah bervariasi terhadap rata-rata citra wajah. Nilai eigen dan vektor eigen dari matriks kovarians masing-masing disebut nilai eigen dan eigen-faces. Eigen-face adalah komponen utama atau vektor dasar yang menangkap varian atau variasi terbanyak pada citra wajah. Dengan memproyeksikan gambar wajah ke eigenfaces, dapat membuat vektor fitur berdimensi rendah untuk membandingkan dan mengenali wajah. Kompresi gambar merupakan suatu proses memperkecil ukuran file gambar tanpa kehilangan banyak kualitas. Salah satu cara untuk mencapai hal ini adalah dengan menggunakan metode dekomposisi nilai singular, yang menguraikan matriks gambar menjadi tiga matriks yang lebih kecil: U, S, dan V. Matriks S adalah matriks diagonal yang memuat nilai-nilai singular, yaitu akar kuadrat dari nilai eigen matriks gambar. Matriks U dan V memuat vektor tunggal kiri dan kanan yang merupakan vektor eigen matriks citra dan transposnya. Dengan hanya menyimpan nilai tunggal terbesar dan vektor tunggal yang sesuai, dapat diperoleh matriks gambar terkompresi yang mendekati gambar asli dengan data yang lebih sedikit. Segmentasi citra merupakan proses membagi gambar menjadi wilayah atau segmen berdasarkan beberapa kriteria. Salah satu caranya dengan menggunakan metode pemotongan ternormalisasi, yang menggunakan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks yang sama untuk menemukan partisi optimal suatu gambar. Matriks tersebut mengukur seberapa mirip setiap piksel satu sama lain berdasarkan fitur seperti warna, tekstur, atau tepi. Metode pemotongan ternormalisasi menggunakan partisi yang meminimalkan jumlah pemotongan, yaitu rasio ketidaksamaan antar segmen terhadap kesamaan dalam segmen. Jumlah pemotongan dapat dinyatakan sebagai fungsi dari vektor eigen matriks yang sama, dan partisi optimal dapat ditemukan dengan memilih vektor eigen yang sesuai dengan nilai eigen terkecil.

Pemrosesan gambar dengan menerapkan teknik nilai eigen dan vektor eigen menjadikan gambar sebagai objek matriks dan transformasi linier yang memetakan satu vektor ke vek-

tor lainnya. Matriks dapat dilihat sebagai representasi transformasi linier, dan vektor dapat dilihat sebagai representasi suatu titik, arah, atau bayangan. Nilai eigen adalah nilai skalar yang menunjukkan seberapa besar suatu vektor diregangkan atau dikecilkan oleh transformasi linier. Vektor eigen adalah vektor yang tidak berubah arah ketika ditransformasikan oleh suatu matriks, hanya besarnya saja. Nilai eigen dan vektor eigen dapat digunakan untuk pemrosesan citra karena dapat mengungkapkan informasi berguna tentang struktur dan karakteristik suatu citra. Nilai eigen dapat memberi tahu varian atau keragaman pada gambar, dan vektor eigen dapat memberi tahu arah atau pola pada gambar.

12.2 Kompresi Gambar Menggunakan Principal Component Analysis

Salah satu contoh pemanfaatan nilai eigen dan vektor eigen dalam kajian ini dibahas dalam subbab ini. Jika diketahui suatu tabel yang berisi data dua dimensi x dan y dari dataframe suatu gambar, sebagaimana ditunjukkan pada tabel 1.

Table 1. Data dua dimensi x dan y.

Dimensi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	2.5	0.5	2.2	1.9	3.1	2.3	2.0	1.0	1.5	1.1
y	2.4	0.7	2.9	2.2	3.0	2.7	1.6	1.1	1.6	0.9

Komputer membaca suatu gambar sebagai matriks dengan unsur-unsur sebagai nilai-nilai piksel yang mewakili sebuah warna tertentu, misal warna hitam diwakili nilai 0, sedangkan warna putih diwakili nilai 255. Hal ini akan membentuk suatu matriks yang terdiri dari tiga dimensi yaitu tinggi$\times$lebar$\times$channel atau channel$\times$tinggi$\times$lebar. Berdasarkan jumlah channel pada matriks, ada dua kategori berdasarkan klasifikasi gambar, yaitu:

- Gambar skala abu-abu (grayscale)
- Gambar *red* (merah), *green* (hijau), dan *blue* (biru) (RGB)

Gambar skala abu-abu dapat dituliskan dalam bentuk matriks dengan nilai-nilai piksel yang terdiri dari 1 channel, sehingga berupa tinggi$\times$lebar$\times 1$, sedangkan gambar berwarna biasanya mempunyai matriks yang terdiri dari tiga channel yaitu RGB, tinggi$\times$lebar$\times 3$. Pada umumnya, 8-bit mempunyai jangkah warna gambar sebanyak 0 sampai $2^8 - 1$. Perubahan dalam gambar tidak nampak atau terbedakan, namun dapat mengurangi memori yang diperlukan untuk menyimpan banyka nilai tersebut. Hal ini disebut sebagai kuantisasi dimana merupakan cara termudah untuk menampilkan kompresi gambar. Setelah mendapatkan data dalam hal ini berbentuk matriks, maka selanjutnya setiap dimensi data dikurangi dengan mean data, sebagaimana persamaan (137).

$$\begin{aligned} x_{mean} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \\ y_{mean} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \end{aligned} \tag{137}$$

Sehingga diperoleh tabel 2

Table 2. Data mean dari dua dimensi x dan y.

Dimensi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	2.5	0.5	2.2	1.9	3.1	2.3	2.0	1.0	1.5	1.1
x-x$_{mean}$	0.69	-1.31	0.39	0.09	1.29	0.49	0.19	-0.81	-0.31	-0.71
y	2.4	0.7	2.9	2.2	3.0	2.7	1.6	1.1	1.6	0.9
y-y$_{mean}$	0.49	-1.21	0.99	0.29	1.09	0.79	-0.31	-0.81	-0.31	-1.01

Hal ini akan menghasilkan data yang nilai mean sama dengan nol.

Kemudian perlu mengetahui adanya hubungan antar dimensi menggunakan perhitungan matriks kovarians, sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (138).

$$Kovarians = \begin{bmatrix} kov(x,x) & kov(x,y) \\ kov(y,x) & kov(y,y) \end{bmatrix} \tag{138}$$

Matriks kovarians adalah alat dasar yang diterapkan di berbagai bidang analisa data. Dalam statistik, matriks ini digunakan dalam metode analisis komponen utama dan transformasi Karhunen - Loève, yaitu teknik yang digunakan dalam pemrosesan gambar dan analisis data. Matriks kovarians dari distribusi normal multivariat diperlukan untuk memahami hubungan dan ketergantungan di antara banyak variabel, termasuk untuk reduksi dimensi atau pemilihan fitur. Dimana untuk masing-masing unsur matriks kovarians ditunjukkan menurut persamaan (139).

$$\begin{aligned} kov(x,y) = kov(y,x) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{mean})(y_i - y_{mean})}{n-1} \\ kov(x,x) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{mean})(x_i - x_{mean})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{mean})^2}{n-1} = var(x) \\ kov(y,y) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{mean})(y_i - y_{mean})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{mean})^2}{n-1} = var(y) \end{aligned} \tag{139}$$

Kovariansi selalu diukur antara 2 dimensi. Perhitungannya ditunjukkan menurut tabel 3.

Table 3. Data kovarians dari dua dimensi x dan y.

Dimensi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	2.5	0.5	2.2	1.9	3.1	2.3	2.0	1.0	1.5	1.1
x-x$_{mean}$	0.69	-1.31	0.39	0.09	1.29	0.49	0.19	-0.81	-0.31	-0.71
y	2.4	0.7	2.9	2.2	3.0	2.7	1.6	1.1	1.6	0.9
y-y$_{mean}$	0.49	-1.21	0.99	0.29	1.09	0.79	-0.31	-0.81	-0.31	-1.01
(x-x$_{mean}$)(y-y$_{mean}$)	0.3381	1.5851	0.3861	0.0261	1.4061	0.3871	-0.0589	0.6561	0.0961	0.7171
$(x - x_{mean})^2$)	0.4761	1.7161	0.1521	0.0081	1.6641	0.2401	0.0361	0.6561	0.0961	0.5041
$(y - y_{mean})^2$	0.2401	1.4641	0.9801	0.0841	1.1881	0.6241	0.0961	0.6561	0.0961	1.0201

Maka matriks kovarians akan didapatkan sebagaimana persamaan (140).

$$Kovarians = \begin{bmatrix} 0.6165 & 0.6154 \\ 0.6154 & 0.7165 \end{bmatrix} \tag{140}$$

Hasil tersebut dapat diperkirakan bahwa variabel x dan y akan meningkat secara bersamaan, karena elemen non-diagonal dalam matriks kovarians ini adalah positif.

Vektor eigen dan nilai eigen dari matriks kovarians mewakili pokok kasus untuk *Principal Component Analysis* (PCA), dimana vektor eigen menentukan arah ruang fitur baru, dan nilai eigen menentukan besarnya. Dengan kata lain, nilai eigen menjelaskan varian data sepanjang sumbu fitur baru. Oleh karena itu, vektor eigen dengan nilai eigen tertinggi merupakan komponen utama pertama. Persamaan untuk mencari vektor eigen dan nilai eigen pada matriks kovarian ditunjukkan menurut persamaan (141).

$$\begin{bmatrix} 0.6165 & 0.6154 \\ 0.6154 & 0.7165 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{141}$$

Dengan menggunakan prinsip pencarian nilai eigen dan vektor eigen akan diperoleh sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (142).

$$\begin{aligned} \text{nilai eigen} &= \begin{bmatrix} 1.2840277 \\ 0.0490834 \end{bmatrix} \\ \text{vektor eigen} &= \begin{bmatrix} 0.6778734 & -0.7351787 \\ 0.7351787 & 0.6778734 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{142}$$

Jumlah nilai eigen dan vektor eigen sama dengan jumlah dimensi dari kumpulan data, dimana ada dua vektor eigen dan nilai eigen. Vektor eigen dengan nilai eigen tertinggi merupakan komponen utama kumpulan data. Pemilihan nilai eigen tertinggi dengan cara megurutkan untuk mengetahui signifikansinya dan mengabaikan komponen yang kurang penting, sehingga kumpulan data akhir akan memiliki dimensi yang lebih kecil dibandingkan aslinya. Analisa prosentase varians dari komponen utama diperoleh menurut tabel 4.

Table 4. Komponen-komponen dari principal component.

Komponen	**PC1**	**PC2**
Deviasi standar	1.1331	0.22155
Proporsi varians	0.9632	0.03682
Proporsi kumulatif	0.9632	1.00000

PC1 mengindikasikan bahwa nilai tertinggi dari varians total yakni 96%, sehingga komponen lainnya diabaikan. Setelah mendapatkan komponen, atau dalam hal ini vektor eigen, selanjutnya melakukan transpose vektor dan mengalikannya dengan data aslinya, sebagaimana ditunjukkan menurut persamaan (143).

$$\text{Data_baru} = \text{Vektor_fitur_baris}^T \times \text{Pengaturan_data_baris}^T \tag{143}$$

Sehingga akan menjadi data baru sebagaimana ditunjukkan pada tabel 5.

Table 5. Data baru dari dua dimensi x dan y.

Data	x	y
1	0.82797019	-0.17511531
2	-1.77758033	0.14285723
3	0.99219749	0.38437499
4	0.27421042	0.13041721
5	1.67580142	-0.20949846
6	0.91294910	0.17528244
7	-0.09910944	-0.34982470
8	-1.14457216	0.04641726
9	-0.43804614	0.01776463
10	-1.22382056	-0.16267529

Jika diambil semua vektor eigen dalam transformasi, maka akan mendapatkan kembali data aslinya. Sebagai catatan bahwa jika telah mengurangi jumlah vektor eigen pada transformasi akhir, maka data yang diambil telah kehilangan beberapa informasi. Sehingga perlu untuk menggunakan komponen utama pertama yakni 96% dari total varians. Sedangkan untuk mendapatkan kembali data aslinya dapat menggunakan persamaan (144).

$$\text{Data_asli} = \text{Vektor_fitur_baris}^T \times \text{Data_baru} + \text{Mean_asli} \tag{144}$$

Variasi sepanjang vektor eigen utama tetap dipertahankan, namun variasi pada komponen lainnya atau vektor eigen yang lain telah diabaikan atau telah hilang.

Ilustrasi terkait dengan teknik PCA ini dapat ditunjukkan sebagaimana berikut: gambar 7 akan digunakan sebagai contoh kompresi gambar.

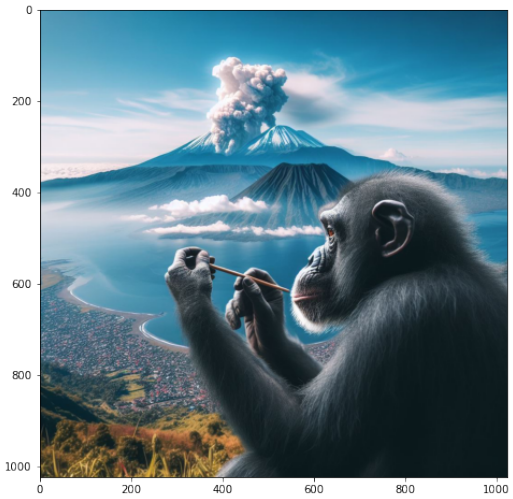

Fig. 7. Gambar beresolusi 1024×1024 diolah menggunakan bing image yang mengilustrasikan simpanse dengan pemandangan gunung merapi dan samudera.

Selanjutnya, akan ditunjukkan terkait dengan kompresi gambar untuk membuktikan bahwa semakin banyak komponen utama, maka rekonstruksi gambar tersebut akan semakin mewakili gambar aslinya dengan tetap menjaga kualitas gambar. Lalu gambar dibagi menjadi tiga warna dasar, yaitu biru, hijau, dan merah, sebagaimana ditunjukkan pada gambar 8.

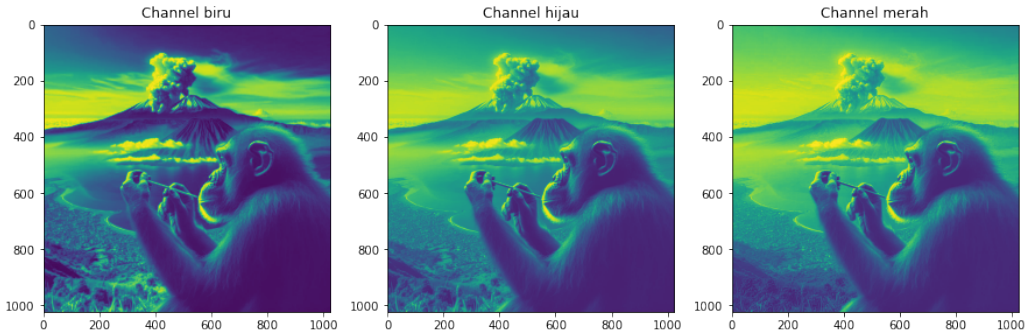

Fig. 8. Pembagian gambar menjadi 3 channel: biru, hijau, dan merah.

PCA merupakan cara yang harus digunakan saat dibutuhkan untuk mengurangi jumlah variabel, namun tidak tahu variabel apa yang harus dibuang. Teknik PCA ini tidak masuk dalam ranah pembelajaran dalam (*deeplearning*), tetapi masuk dalam domain pembelajaran mesin (*machine learning*). PCA dari rasio *explained variance* untuk masing-masing gambar tersebut mendapatkan nilai sebesar 0,9643820390025951; 0,9678168798328584; dan 0,9763509232367119, secara berurutan. Sedangkan nilai eigen untuk masing-masing channel ditunjukkan menurut gambar 9.

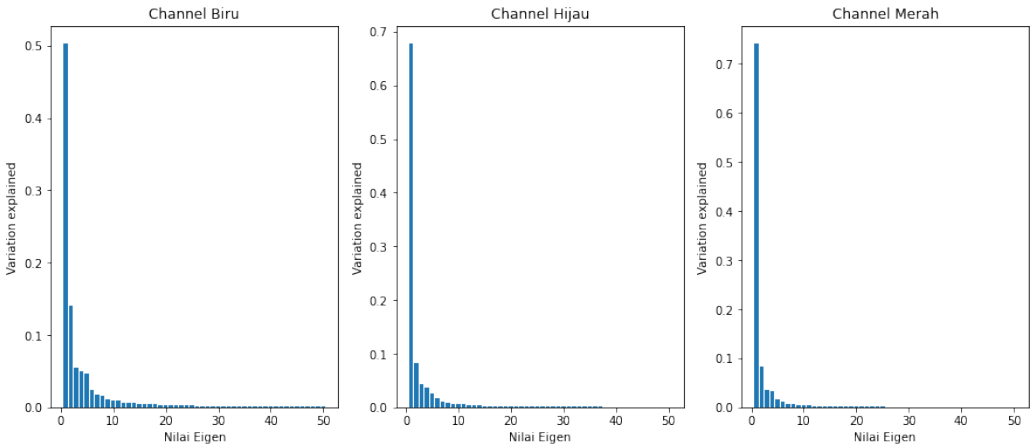

Fig. 9. Nilai eigen dari 3 channel: biru, hijau, dan merah.

PCA adalah sebuah cara mereduksi dimensi menggunakan beberapa garis/bidang yang disebut sebagai *principle component* (PC). Asumsinya dengan menggunakan beberapa PC, mampu memudahkan dalam interpretasi data dan melihat pembagian data ke dalam beberapa klaster, meskipun pengklasteran bukan tujuan utama dalam hal ini. Hasil perhitungan

dari gambar mampu mendapatkan jumlah varians komponen 95% sebanyak 26 yang diperoleh dari komponen-komponen yang ditunjukkan pada gambar 10.

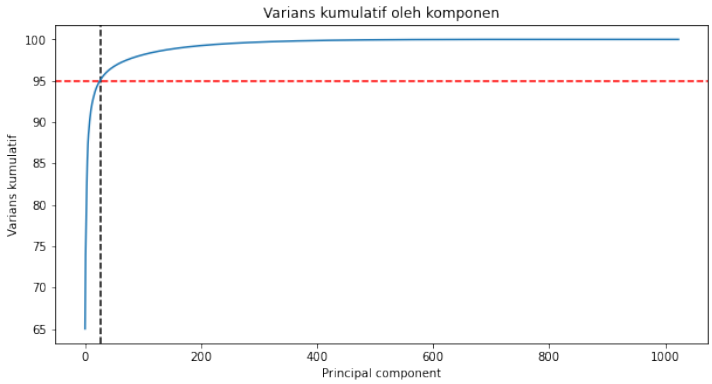

Fig. 10. Varians kumulatif oleh komponen pada PCA.

Sedangkan variasi komponen pada gambar dapat ditunjukkan menurut gambar 11.

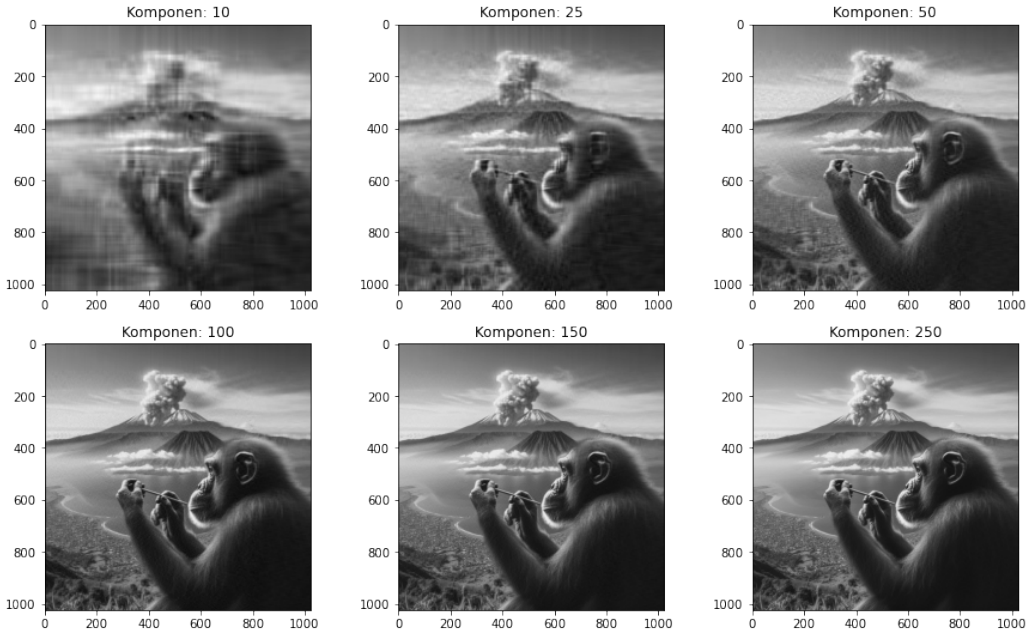

Fig. 11. Kompresi gambar berdasarkan jumlah komponen 10, 25, 50, 100, 150, dan 250.

Terlihat bahwa semakin besar komponen maka kejelasan gambar semakin bagus, sebaliknya semakin kecil jumlah komponen maka semakin blur yang menandakan terjadi kompresi pada gambar, yang tentunya ukuran berkas gambar menjadi semakin kecil.

Tes 36: Carilah contoh penerapan eigen pada aspek multimedia yang lain seperti suara, text, video, dan animasi; kemudian selesaikan dengan singkat.

DAFTAR PUSTAKA

[1] "Matrices - inverses."
[2] "Matrices - determinants."
[3] "Solving a system using an inverse."
[4] "Solving systems with cramer's rule."
[5] "Solving systems with gaussian elimination."
[6] "How can you use eigenvalues and eigenvectors to improve image processing?."
[7] "The cross product."
[8] "Eigenvalues."
[9] B. D. Shaffer, "Eigenvalues and eigenvectors."
[10] I. Hussain, "A quick guide to color image compression using pca in python."
[11] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, "Johann carl friedrich gauss."
[12] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, "Gabriel cramer."
[13] M. Boelkins, D. Austin, and S. Schlicker, "The cross product."
[14] M. Shah, "What exactly eigenvalues and eigenvectors are?."
[15] X. V. García, "Image compression using pca."

LAMPIRAN A: Pemrograman Python untuk matriks

```
A = [[1, 2, 3],  \# A=2x3
     [4, 5, 6]]

B = [[1, 2],  \# B=3x2
     [3, 4],
     [5, 6]]
\# ***********************************
\# Ukuran matriks

def shape(A):
    num_rows = len(A)
    num_cols = len(A[0]) if A else 0
    return num_rows, num_cols

print(shape([[1,2,3], [4,5,6]]))
print(shape([[1,2,3]]) )
print(shape([]) )

# ***********************************
# Mendapatkan baris atau kolom matriks

def get_row(A, i):
    return A[i]  # Baris A[i]

def get_column(A, j):
    return [A_i[j]  # jth dari baris A_i
            for A_i in A] # Baris A_i

# ***********************************
# Membuat masukan matriks

def make_matrix(num_rows, num_cols, entry_fn):
    """returns a num_rows x num_cols matrix
       whose (i,j)th entry is entry_fn(i, j)"""

    return [[entry_fn(i, j) # Buat list
             for j in range(num_cols)]
             for i in range(num_rows)]

# ***********************************
```

```
# Membuat matriks identitas
# Tentukan 1 if i==j dan 0 jika i!=j

def is_diagonal(i, j):
    """1 pada 'diagonal', lainnya 0 """
    return 1 if i == j else 0

# Panggil fungsi dalam matriks:

identity_matrix = make_matrix(4, 4, is_diagonal)
print(identity_matrix)
```

LAMPIRAN B: Penerapan matriks pada jaringan syaraf tiruan sederhana menggunakan Python

```
import numpy as np

class NeuralNetwork():

    def __init__(self):
        # Seed the random number generator
        np.random.seed(1)

        # Set synaptic weights to a 3x1 matrix,
        # with values from -1 to 1 and mean 0
        self.synaptic_weights = 2 * np.random.random((3, 1)) - 1

    def sigmoid(self, x):
        """
        Takes in weighted sum of the inputs and normalizes
        them through between 0 and 1 through a sigmoid function
        """
        return 1 / (1 + np.exp(-x))

    def sigmoid_derivative(self, x):
        """
        The derivative of the sigmoid function used to
        calculate necessary weight adjustments
        """
        return x * (1 - x)

    def train(self, training_inputs, training_outputs, training_iterations):
        """
        We train the model through trial and error, adjusting the
        synaptic weights each time to get a better result
        """
        for iteration in range(training_iterations):
            # Pass training set through the neural network
            output = self.think(training_inputs)

            # Calculate the error rate
            error = training_outputs - output

            # Multiply error by input and gradient of the sigmoid function
```

```
            # Less confident weights are adjusted more through
            # the nature of the function
            adjustments = np.dot(training_inputs.T, error *
                self.sigmoid_derivative(output))

            # Adjust synaptic weights
            self.synaptic_weights += adjustments

    def think(self, inputs):
        """
        Pass inputs through the neural network to get output
        """

        inputs = inputs.astype(float)
        output = self.sigmoid(np.dot(inputs, self.synaptic_weights))
        return output


if __name__ == "__main__":

    # Initialize the single neuron neural network
    neural_network = NeuralNetwork()

    print("Random starting synaptic weights: ")
    print(neural_network.synaptic_weights)

    # The training set, with 4 examples consisting of 3
    # input values and 1 output value
    training_inputs = np.array([[0,0,1],
                                [1,1,1],
                                [1,0,1],
                                [0,1,1]])

    training_outputs = np.array([[0,1,1,0]]).T

    # Train the neural network
    neural_network.train(training_inputs, training_outputs, 10000)

    print("Synaptic weights after training: ")
    print(neural_network.synaptic_weights)

    A = str(input("Input 1: "))
```

```
B = str(input("Input 2: "))
C = str(input("Input 3: "))

print("New situation: input data = ", A, B, C)
print("Output data: ")
print(neural_network.think(np.array([A, B, C])))
```

LAMPIRAN C: Kompresi gambar menggunakan PCA pada Python

```
import numpy as np
from matplotlib.image import imread
import matplotlib.pyplot as plt
import cv2
import pandas as pd
from sklearn.decomposition import PCA, IncrementalPCA

image_raw = imread("simp.jpg")
print(image_raw.shape)

# Tampilkan gambar
plt.figure(figsize=[12,8])
plt.imshow(image_raw)

# ===============
#Membagi ke dalam channel
blue,green,red = cv2.split(image_raw)

# Plot gambar
fig = plt.figure(figsize = (15, 7.2))
fig.add_subplot(131)
plt.title("Channel biru")
plt.imshow(blue)

fig.add_subplot(132)
plt.title("Channel hijau")
plt.imshow(green)

fig.add_subplot(133)
plt.title("Channel merah")
plt.imshow(red)

plt.show()

# ===============
blue_temp_df = pd.DataFrame(data = blue)
blue_temp_df

# ===============
# Skala data
```

```
df_blue = blue/255
df_green = green/255
df_red = red/255

# Fit data
pca_b = PCA(n_components=50)
pca_b.fit(df_blue)
trans_pca_b = pca_b.transform(df_blue)

pca_g = PCA(n_components=50)
pca_g.fit(df_green)
trans_pca_g = pca_g.transform(df_green)

pca_r = PCA(n_components=50)
pca_r.fit(df_red)
trans_pca_r = pca_r.transform(df_red)

print(trans_pca_b.shape)
print(trans_pca_r.shape)
print(trans_pca_g.shape)

# ===============
print(f"Channel biru : {sum(pca_b.explained_variance_ratio_)}")
print(f"Channel hijau: {sum(pca_g.explained_variance_ratio_)}")
print(f"Channel merah : {sum(pca_r.explained_variance_ratio_)}")

# ===============
fig = plt.figure(figsize = (15, 6))
fig.add_subplot(131)
plt.title("Channel Biru")
plt.ylabel('Variation explained')
plt.xlabel('Nilai Eigen')
plt.bar(list(range(1,51)),pca_b.explained_variance_ratio_)

fig.add_subplot(132)
plt.title("Channel Hijau")
plt.ylabel('Variation explained')
plt.xlabel('Nilai Eigen')
plt.bar(list(range(1,51)),pca_g.explained_variance_ratio_)

fig.add_subplot(133)
plt.title("Channel Merah")
```

```
plt.ylabel('Variation explained')
plt.xlabel('Nilai Eigen')
plt.bar(list(range(1,51)),pca_r.explained_variance_ratio_)
plt.show()

# ===============
image_sum = image_raw.sum(axis=2)
print(image_sum.shape)

image_bw = image_sum/image_sum.max()
print(image_bw.max())

plt.figure(figsize=[12,8])
plt.imshow(image_bw, cmap=plt.cm.gray)

# ===============
pca = PCA()
pca.fit(image_bw)

# mendapatkan varians kumulatif

var_cumu = np.cumsum(pca.explained_variance_ratio_)*100

# Jumlah PC dari variance explain 95%
k = np.argmax(var_cumu>95)
print("Number of components explaining 95% variance: "+ str(k))
#print("\n")

plt.figure(figsize=[10,5])
plt.title('Varians kumulatif oleh komponen')
plt.ylabel('Varians kumulatif')
plt.xlabel('Principal component')
plt.axvline(x=k, color="k", linestyle="--")
plt.axhline(y=95, color="r", linestyle="--")
ax = plt.plot(var_cumu)

# ===============
ipca = IncrementalPCA(n_components=k)
image_recon = ipca.inverse_transform(ipca.fit_transform(image_bw))

# Plot gambar terekonstruksi
plt.figure(figsize=[12,8])
```

```
plt.imshow(image_recon,cmap = plt.cm.gray)

# ===============
# Fungsi untuk rekonstruksi dan plot gambar pada komponen
def plot_at_k(k):
    ipca = IncrementalPCA(n_components=k)
    image_recon = ipca.inverse_transform(ipca.fit_transform(image_bw))
    plt.imshow(image_recon,cmap = plt.cm.gray)

k = 150
plt.figure(figsize=[12,8])
plot_at_k(100)

# ===============
ks = [10, 25, 50, 100, 150, 250]

plt.figure(figsize=[15,9])

for i in range(6):
    plt.subplot(2,3,i+1)
    plot_at_k(ks[i])
    plt.title("Komponen: "+str(ks[i]))

plt.subplots_adjust(wspace=0.2, hspace=0.2)
plt.show()
```